

LEMMA DI BAKER-HAUSDORFF

PIERFRANCESCO URBANI

Spesso in meccanica quantistica, così come in teoria dei gruppi di Lie è utile applicare il lemma di Baker-Hausdorff che asserisce che

Theorem. *Siano X e Y due generatori di un gruppo di Lie¹. Allora vale la seguente formula*

$$(0.1) \quad e^{-iY} X e^{iY} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-i)^j}{j!} \underbrace{[Y, [Y, \dots [Y, X] \dots]]}_{j \text{ volte}}$$

dove per convenzione si pone il commutatore per $j = 0$ pari a X .

Dimostrazione. Innanzitutto dimostriamo il seguente □

Lemma. *Il commutatore che compare nella (0.1) può essere valutato nel seguente modo*

$$(0.2) \quad \underbrace{[Y, [Y, \dots [Y, X] \dots]]}_{n \text{ volte}} = \sum_{l=0}^n (-1)^l \binom{n}{l} Y^{n-l} X Y^l.$$

Dimostrazione. Si procede per induzione. Si riconosce che per $n = 1$ la proposizione è vera. Verifichiamola anche nei casi $n = 2, 3$. Per $n = 2$ abbiamo

$$(0.3) \quad [Y, [Y, X]] = Y(YX - XY) - (YX - XY)Y = Y^2X - 2YXY + XY^2$$

mentre per $n = 3$ abbiamo proprio, sfruttando il caso $n = 2$,

$$(0.4) \quad [Y, [Y, [Y, X]]] = Y(Y^2X - 2YXY + XY^2) - (Y^2X - 2YXY + XY^2)Y = Y^3X - 3Y^2XY + 3YXY^2 - XY^3$$

che giustificano il passo induttivo per cui

$$(0.5) \quad \underbrace{[Y, [Y, \dots [Y, X] \dots]]}_{n-1 \text{ volte}} = \sum_{l=0}^{n-1} (-1)^l \binom{n-1}{l} Y^{n-l-1} X Y^l.$$

¹In generale X e Y possono essere due generici operatori e non è necessario che siano dei generatori dell'algebra di Lie, visto che nella dimostrazione tale proprietà non verrà utilizzata.

Applicando tale asserzione al caso $j = n$ otteniamo

(0.6)

$$\underbrace{[Y, [Y, \dots [Y, X] \dots]]}_{n \text{ volte}} = Y \left(\underbrace{[Y, [Y, \dots [Y, X] \dots]]}_{n-1 \text{ volte}} \right) - \left(\underbrace{[Y, [Y, \dots [Y, X] \dots]]}_{n-1 \text{ volte}} \right) Y =$$

$$(0.7) \quad = \sum_{l=0}^{n-1} (-1)^l \binom{n-1}{l} (Y^{n-l} X Y^l - Y^{n-l-1} X Y^{l+1}) =$$

$$(0.8) \quad = Y^n X + (-1)^n X Y^n + \sum_{l=1}^{n-1} (-1)^l \left[\binom{n-1}{l} + \binom{n-1}{l-1} \right] Y^{n-l} X Y^l =$$

$$(0.9) \quad = \sum_{l=0}^n (-1)^l \binom{n}{l} Y^{n-l} X Y^l$$

che dimostra il lemma. Si noti che nel passaggio dalla (0.8) alla (0.9) è stata usata la proprietà del triangolo di tartaglia che si può facilmente dimostrare per induzione

$$(0.10) \quad \binom{n-1}{l} + \binom{n-1}{l-1} = \binom{n}{l}.$$

Ritorniamo ora alla dimostrazione del lemma di Baker-Hausdorff. Sviluppiamo i due esponenziali che compaiono al primo membro della (0.1)

$$\begin{aligned} e^{-iY} X e^{iY} &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k i^k}{k!} Y^k \right) X \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{i^j}{j!} Y^j \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^k i^{k+j}}{k! j!} Y^k X Y^j = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n=k+j} \sum_{l=0}^n \frac{(-1)^{n-j} i^n}{(n-j)! j!} Y^{n-j} X Y^j = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n=k+j} \sum_{l=0}^n \frac{(-1)^j (-i)^n}{(n-j)! j!} Y^{n-j} X Y^j = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n=k+j} \sum_{l=0}^n \frac{(-1)^j (-i)^n n!}{(n-j)! j!} \frac{Y^{n-j} X Y^j}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \underbrace{[Y, [Y, \dots [Y, X] \dots]]}_{n \text{ volte}} \end{aligned}$$

che è proprio la tesi. \square

Si può dare anche una versione più allargata della formula (0.1) visto che come si può vedere dalla dimostrazione, l'unità immaginaria i non è nient'altro che un parametro. Ne segue che operando il "prolungamento" $i \rightarrow i\lambda$ si ottiene

$$(0.11) \quad e^{-i\lambda Y} X e^{i\lambda Y} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-\lambda i)^j}{j!} \underbrace{[Y, [Y, \dots [Y, X] \dots]]}_{j \text{ volte}}.$$

Il lemma di Baker-Hausdorff è molto utile per valutare il prodotto di due elementi di un gruppo definiti dalla rappresentazione esponenziale. Supponiamo di avere

$$g = e^{iY} \quad h = e^{iX},$$

e vogliamo sapere la forma di X' dove X' è definito da

$$g^{-1} h g = e^{iX'}.$$

Si ha che

$$(0.12) \quad g^{-1}hg = e^{-iY}e^{iX}e^{iY} = e^{-iY} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} X^n \right) e^{iY} =$$

$$(0.13) \quad = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} e^{-iY} X^n e^{iY} .$$

Basta ora dimostrare che

$$(0.14) \quad e^{-iY} X^n e^{iY} = (e^{-iY} X e^{iY})^n .$$

Si ha infatti che $1 = e^{iY} e^{-iY}$ (dove 1 è da intendersi come l'operatore identità). Sostituendo l'operatore identità $n - 1$ volte nella (0.14) si ottiene che

$$(0.15) \quad e^{-iY} \underbrace{X \dots X}_n e^{iY} = e^{-iY} X e^{iY} \underbrace{(e^{-iY} X e^{iY}) \dots (e^{-iY} X e^{iY})}_{n-1} = (e^{-iY} X e^{iY})^n$$

che è proprio la (0.14). Inserendo questa uguaglianza nella (0.13) si ottiene

$$(0.16) \quad g^{-1}hg = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} (e^{-iY} X e^{iY})^n = e^{iX'}$$

dove $X' = e^{-iY} X e^{iY}$. Il lemma di Baker-Hausdorff fornisce un'espressione diretta per il calcolo di tale prodotto di operatori. Specialmente se rimpiazziamo $Y \rightarrow \epsilon Y$ dove ϵ è un parametro piccolo, allora il lemma di Baker-Hausdorff rappresenta una sorta di sviluppo in serie di Taylor per il prodotto.