

## QUANTIZZAZIONE DEL CAMPO ELETTROMAGNETICO

PIERFRANCESCO URBANI VALERIO ASTUTI

La densità di lagrangiana per il campo elettromagnetico è data da

$$(1) \quad \mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = \frac{|\vec{E}|^2 - |\vec{B}|^2}{2}.$$

Il campo elettrico e il campo magnetico possono essere espressi, nella gauge di Coulomb, attraverso

$$(2) \quad \vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

dove

$$(3) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0.$$

Se il sistema è racchiuso in un volume finito e imponiamo le condizioni periodiche al bordo allora il potenziale vettore può scriversi in serie di Fourier

$$(4) \quad \vec{A} = \sum_{\vec{k},r} \left[ a_{\vec{k},r}(t) \epsilon_{\vec{k}r} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} + a_{\vec{k},r}^*(t) \epsilon_{\vec{k}r}^* e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \right] \quad r = 1, 2.$$

Ne segue che, imponendo la gauge di Coulomb

$$(5) \quad \vec{k} \cdot \epsilon_{\vec{k}r} = 0.$$

Calcoliamo ora il campo elettrico da questa espressione per il potenziale vettore:

$$(6) \quad \vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\sum_{\vec{k},r} \left[ \dot{a}_{\vec{k},r}(t) \epsilon_{\vec{k}r} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} + \dot{a}_{\vec{k},r}^*(t) \epsilon_{\vec{k}r}^* e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \right]$$

Il campo magnetico è invece dato da

$$(7) \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = i \sum_{\vec{k},r} \left[ a_{\vec{k},r}(t) \vec{k} \times \epsilon_{\vec{k}r} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} - a_{\vec{k},r}^*(t) \vec{k} \times \epsilon_{\vec{k}r}^* e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \right].$$

A questo punto calcoliamo la lagrangiana del sistema

$$(8) \quad L = \int_V \frac{|\vec{E}|^2 - |\vec{B}|^2}{2} d^3x.$$

L'integrale sul campo elettrico dà<sup>1</sup>

$$(11) \quad \int_V \frac{|\vec{E}|^2}{2} d^3x = \frac{1}{2} \sum_{\vec{k},\vec{j},r,s} \int_V d^3x \left[ \left( \dot{a}_{\vec{k},r} \epsilon_{\vec{k}r} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} + \dot{a}_{\vec{k},r}^* \epsilon_{\vec{k}r}^* e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \right) \cdot \left( \dot{a}_{\vec{j},s} \epsilon_{\vec{j}s} e^{-i\vec{j}\cdot\vec{x}} + \dot{a}_{\vec{j},s}^* \epsilon_{\vec{j}s}^* e^{i\vec{j}\cdot\vec{x}} \right) \right] =$$

$$(12) \quad = \frac{1}{2} V \sum_{\vec{k},\vec{j},r,s} \left[ \dot{a}_{\vec{k},r} \dot{a}_{\vec{j},s}^* \epsilon_{\vec{k}r} \cdot \epsilon_{\vec{j}s}^* \delta_{\vec{k},\vec{j}} + \dot{a}_{\vec{k},r} \dot{a}_{\vec{j},s} \epsilon_{\vec{k}r} \cdot \epsilon_{\vec{j}s} \delta_{\vec{k},-\vec{j}} + \dot{a}_{\vec{k},r}^* \dot{a}_{\vec{j},s}^* \epsilon_{\vec{k}r}^* \cdot \epsilon_{\vec{j}s}^* \delta_{\vec{k},-\vec{j}} + \dot{a}_{\vec{k},r}^* \dot{a}_{\vec{j},s} \epsilon_{\vec{k}r}^* \cdot \epsilon_{\vec{j}s} \delta_{\vec{k},\vec{j}} \right] =$$

$$(13) \quad = \frac{1}{2} V \sum_{\vec{k},r,s} \left[ \dot{a}_{\vec{k},r} \dot{a}_{\vec{k},s}^* \epsilon_{\vec{k}r} \cdot \epsilon_{\vec{k}s}^* + \dot{a}_{\vec{k},r} \dot{a}_{-\vec{k},s} \epsilon_{\vec{k}r} \cdot \epsilon_{-\vec{k}s} + \dot{a}_{\vec{k},r}^* \dot{a}_{-\vec{k},s}^* \epsilon_{\vec{k}r}^* \cdot \epsilon_{-\vec{k}s}^* + \dot{a}_{\vec{k},r}^* \dot{a}_{\vec{k},s} (t) \epsilon_{\vec{k}r}^* \cdot \epsilon_{\vec{k}s} \right] =$$

$$(14) \quad = \frac{1}{2} V \sum_{\vec{k},r,s} \left[ \dot{a}_{\vec{k},r} \dot{a}_{\vec{k},s}^* \epsilon_{\vec{k}r} \cdot \epsilon_{\vec{k}s}^* + \dot{a}_{\vec{k},r} \dot{a}_{\vec{k},s} \epsilon_{\vec{k}r} \cdot \epsilon_{\vec{k}s} + \dot{a}_{\vec{k},r}^* \dot{a}_{\vec{k},s}^* \epsilon_{\vec{k}r}^* \cdot \epsilon_{\vec{k}s}^* + \dot{a}_{\vec{k},r}^* \dot{a}_{\vec{k},s} \epsilon_{\vec{k}r}^* \cdot \epsilon_{\vec{k}s} \right] =$$

$$(15) \quad = \frac{1}{2} V \sum_{\vec{k},r,s} \left[ \dot{a}_{\vec{k},r} \dot{a}_{\vec{k},s}^* + \dot{a}_{\vec{k},r} \dot{a}_{\vec{k},s} + \dot{a}_{\vec{k},r}^* \dot{a}_{\vec{k},s}^* + \dot{a}_{\vec{k},r}^* \dot{a}_{\vec{k},s} \right] \delta_{rs} =$$

<sup>1</sup>Si fa uso delle seguenti relazioni

$$(9) \quad \int_V d^3x e^{i(\vec{k}\pm\vec{j})\cdot\vec{x}} = V \delta_{\vec{k},\mp\vec{j}}$$

$$(10) \quad a_{\vec{k},r}^* = a_{-\vec{k},r} \quad \epsilon_{\vec{k},r}^* = \epsilon_{-\vec{k},r}$$

$$(16) \quad = V \sum_{\vec{k}, r} \left[ \dot{a}_{\vec{k}, r} a_{\vec{k}, r}^* + \dot{a}_{\vec{k}, r}^* a_{\vec{k}, s} \right].$$

Calcoliamo ora l'integrale per il campo magnetico<sup>2</sup>

$$(18) \quad \int_V d^3x \frac{|\vec{B}|^2}{2} = \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}, \vec{j}, r, s} \int_V d^3x \sum_{\vec{k}, \vec{j}, r, s} \left[ \left( a_{\vec{k}, r} \vec{k} \times \epsilon_{\vec{k}r} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} - a_{\vec{k}, r}^* \vec{k} \times \epsilon_{\vec{k}r}^* e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} \right) \cdot \left( a_{\vec{j}, s}^* \vec{j} \times \epsilon_{\vec{j}s}^* e^{-i\vec{j} \cdot \vec{x}} - a_{\vec{j}, s} \vec{j} \times \epsilon_{\vec{j}s} e^{i\vec{j} \cdot \vec{x}} \right) \right] =$$

$$(19) \quad = \frac{1}{2} V \sum_{\vec{k}, \vec{j}, r, s} \left[ a_{\vec{k}, r} a_{\vec{j}, s}^* (\vec{k} \times \epsilon_{\vec{k}r}) \cdot (\vec{j} \times \epsilon_{\vec{j}s}^*) \delta_{\vec{k}, \vec{j}} - a_{\vec{k}, r} a_{\vec{j}, s} (\vec{k} \times \epsilon_{\vec{k}r}) \cdot (\vec{j} \times \epsilon_{\vec{j}s}) \delta_{\vec{k}, -\vec{j}} + \right.$$

$$(20) \quad \left. - a_{\vec{k}, r}^* a_{\vec{j}, s}^* (\vec{k} \times \epsilon_{\vec{k}r}^*) \cdot (\vec{j} \times \epsilon_{\vec{j}s}^*) \delta_{\vec{k}, -\vec{j}} + a_{\vec{k}, r}^* a_{\vec{j}, s} (\vec{k} \times \epsilon_{\vec{k}r}^*) \cdot (\vec{j} \times \epsilon_{\vec{j}s}) \delta_{\vec{k}, \vec{j}} \right] =$$

$$(21) \quad = \frac{1}{2} V \sum_{\vec{k}, r, s} \left[ a_{\vec{k}, r} a_{\vec{k}, s}^* (\vec{k} \times \epsilon_{\vec{k}r}) \cdot (\vec{k} \times \epsilon_{\vec{k}s}^*) + a_{\vec{k}, r} a_{-\vec{k}, s} (\vec{k} \times \epsilon_{\vec{k}r}) \cdot (\vec{k} \times \epsilon_{-\vec{k}s}) + \right.$$

$$(22) \quad \left. + a_{\vec{k}, r}^* a_{-\vec{k}, s}^* (\vec{k} \times \epsilon_{\vec{k}r}^*) \cdot (\vec{k} \times \epsilon_{-\vec{k}s}^*) + a_{\vec{k}, r}^* a_{\vec{k}, s} (\vec{k} \times \epsilon_{\vec{k}r}^*) \cdot (\vec{k} \times \epsilon_{\vec{k}s}) \right] =$$

$$(23) \quad \frac{1}{2} V \sum_{\vec{k}, r, s} |\vec{k}|^2 \delta_{rs} \left[ a_{\vec{k}, r} a_{\vec{k}, s}^* + a_{\vec{k}, r} a_{\vec{k}, s} + a_{\vec{k}, r}^* a_{\vec{k}, s} + a_{\vec{k}, r}^* a_{\vec{k}, s} \right] =$$

$$(24) \quad = V \sum_{\vec{k}, r} |\vec{k}|^2 \left[ a_{\vec{k}, r} a_{\vec{k}, s}^* + a_{\vec{k}, r}^* a_{\vec{k}, s} \right].$$

Ne segue che la lagrangiana è data da

$$(25) \quad L = \sum_{\vec{k}r} V \left[ \dot{a}_{\vec{k}, r}(t) \dot{a}_{\vec{k}, r}^*(t) + \dot{a}_{\vec{k}, r}^*(t) \dot{a}_{\vec{k}, s}(t) - |\vec{k}|^2 \left( a_{\vec{k}, r}(t) a_{\vec{k}, s}^*(t) + a_{\vec{k}, r}^*(t) a_{\vec{k}, s}(t) \right) \right].$$

In realtà la lagrangiana scritta non è del tutto corretta. Il formalismo di Lagrange impone che tutti i vincoli a cui devono sottostare le variabili dinamiche debbano essere rimossi nell'espressione della lagrangiana. Nella formula (25) il vincolo (10) non è stato rimosso. La lagrangiana corretta è quindi semplicemente data da

$$(26) \quad L = \sum_{\vec{k}r} 2V \left[ \dot{a}_{\vec{k}, r}(t) \dot{a}_{\vec{k}, r}^*(t) + \dot{a}_{\vec{k}, r}^*(t) \dot{a}_{\vec{k}, s}(t) - |\vec{k}|^2 \left( a_{\vec{k}, r}(t) a_{\vec{k}, s}^*(t) + a_{\vec{k}, r}^*(t) a_{\vec{k}, s}(t) \right) \right]$$

dove  $\sum$  indica che si somma solo sui vettori  $\vec{k}$  a componenti non negative. Calcoliamo ora le equazioni del moto

$$(27) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{a}_{kr}} = \frac{\partial L}{\partial a_{kr}} \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{a}_{kr}^*} = \frac{\partial L}{\partial a_{kr}^*}.$$

Prendiamo la seconda delle due equazioni

$$(28) \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{a}_{kr}^*} = 4V \dot{a}_{\vec{k}, r}$$

$$(29) \quad \frac{\partial L}{\partial a_{kr}^*} = -4|\vec{k}|^2 a_{kr}$$

Per cui ricaviamo che

$$(30) \quad \ddot{a}_{\vec{k}, r} = -\omega_k^2 a_{\vec{k}, r} \quad \omega_k^2 = |\vec{k}|^2.$$

La soluzione più generale di tale equazione è data imponendo la condizione per cui  $a_{\vec{k}, r}^* = a_{-\vec{k}, r}$  e quindi può essere scritta nel seguente modo

$$(31) \quad a_{\vec{k}, r} = N \left( c_{kr} e^{-i\omega t} + c_{-\vec{k}r}^\dagger e^{i\omega t} \right)$$

dove  $N$  è un opportuno fattore di normalizzazione. Applichiamo ora il procedimento di quantizzazione canonica. Calcoliamo i momenti cinetici coniugati

$$(32) \quad \pi_{\vec{k}, r} = \frac{\partial L}{\partial \dot{a}_{kr}} = 4V \dot{a}_{\vec{k}, r} = 4V N i \omega \left( c_{kr}^\dagger e^{i\omega t} - c_{-\vec{k}r} e^{-i\omega t} \right)$$

<sup>2</sup>Si fa uso della relazione

$$(17) \quad (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c})$$

e imponiamo quindi le regole canoniche di commutazione

$$(33) \quad \left[ a_{\vec{k},r}, \pi_{\vec{k},r} \right] = i$$

$$(34) \quad \left[ a_{\vec{k},r}, a_{\vec{k},r}^\dagger \right] = 0$$

che devono essere relazioni valide ad ogni tempo. Calcoliamo la prima:

$$(35) \quad \left[ a_{\vec{k},r}, \pi_{\vec{k},r} \right] = 4VN^2i\omega \left[ c_{\vec{k}r} e^{-i\omega t} + c_{-\vec{k}r}^\dagger e^{i\omega t}, c_{\vec{k}r}^\dagger e^{i\omega t} - c_{-\vec{k}r} e^{-i\omega t} \right] =$$

$$(36) \quad 4VN^2i\omega \left\{ \left[ c_{\vec{k}r}, c_{\vec{k}r}^\dagger \right] + \left[ c_{-\vec{k}r}, c_{-\vec{k}r}^\dagger \right] - \left[ c_{\vec{k}r}, c_{-\vec{k}r} \right] e^{-2i\omega t} + \left[ c_{-\vec{k}r}, c_{\vec{k}r}^\dagger \right] e^{2i\omega t} \right\} = i$$

da cui ricaviamo che, poichè tale relazione deve essere valida ad ogni tempo

$$(37) \quad \left[ c_{\vec{k}r}, c_{-\vec{k}r} \right] = \left[ c_{\vec{k}r}^\dagger, c_{-\vec{k}r}^\dagger \right] = 0$$

e quindi che

$$(38) \quad 4VN^2\omega \left\{ \left[ c_{\vec{k}r}, c_{\vec{k}r}^\dagger \right] + \left[ c_{-\vec{k}r}, c_{-\vec{k}r}^\dagger \right] \right\} = 1.$$

Dall'altra regola di commutazione si ricava che

$$(39) \quad \left[ a_{\vec{k},r}, a_{\vec{k},r}^\dagger \right] = N^2 \left[ c_{\vec{k}r} e^{-i\omega t} + c_{-\vec{k}r}^\dagger e^{i\omega t}, c_{\vec{k}r}^\dagger e^{i\omega t} + c_{-\vec{k}r} e^{-i\omega t} \right] = 0$$

$$(40) \quad \left[ c_{\vec{k}r}, c_{\vec{k}r}^\dagger \right] = \left[ c_{-\vec{k}r}, c_{-\vec{k}r}^\dagger \right]$$

per cui la (38) diventa

$$(41) \quad 8VN^2\omega \left[ c_{\vec{k}r}, c_{\vec{k}r}^\dagger \right] = 1$$

da cui ricaviamo che se imponiamo

$$(42) \quad \left[ c_{\vec{k}r}, c_{\vec{k}r}^\dagger \right] = 1$$

deve essere che

$$(43) \quad N = \frac{1}{2\sqrt{2\omega V}}.$$

Calcoliamo ora il potenziale vettore in termini degli operatori di creazione e distruzione  $c_{\vec{k}r}^\dagger, c_{\vec{k}r}$ . Si ha:

$$(44) \quad \vec{A} = \sum_{\vec{k},r} \left[ a_{\vec{k},r}(t) \epsilon_{\vec{k}r} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} + a_{\vec{k},r}^*(t) \epsilon_{\vec{k}r}^* e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \right] =$$

$$(45) \quad = \sum_{\vec{k},r} \frac{1}{2\sqrt{2\omega V}} \left[ \left( c_{\vec{k}r} e^{-i\omega t} + c_{-\vec{k}r}^\dagger e^{i\omega t} \right) \epsilon_{\vec{k}r} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} + \left( c_{\vec{k}r}^\dagger e^{i\omega t} + c_{-\vec{k}r} e^{-i\omega t} \right) \epsilon_{\vec{k}r}^* e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \right] =$$

$$(46) \quad = \sum_{\vec{k},r} \frac{1}{\sqrt{2\omega V}} \left[ c_{\vec{k}r} \epsilon_{\vec{k}r} e^{-ik^\mu x_\mu} + c_{\vec{k}r}^\dagger \epsilon_{\vec{k}r}^* e^{ik^\mu x_\mu} \right].$$

Calcoliamo ora l'hamiltoniana. Il calcolo può essere fatto in due modi diversi. Il primo consiste nel fare la trasformata di Legendre della lagrangiana; il secondo invece coinvolge direttamente l'espressione per l'energia del campo elettromagnetico. Seguiamo per comodità la seconda strada

$$(47) \quad H = \int_V \frac{|\vec{E}|^2 + |\vec{B}|^2}{2} d^3x = \sum_{\vec{k}r} V \left[ \dot{a}_{\vec{k},r}(t) \dot{a}_{\vec{k},r}^*(t) + \dot{a}_{\vec{k},r}^*(t) \dot{a}_{\vec{k},s}(t) + \omega^2 \left( a_{\vec{k},r}(t) a_{\vec{k},s}^*(t) + a_{\vec{k},r}^*(t) a_{\vec{k},s}(t) \right) \right].$$

Calcoliamo preliminarmente

$$(48) \quad a_{\vec{k},r}^* = \frac{1}{2\sqrt{2\omega V}} \left( c_{\vec{k}r}^\dagger e^{i\omega t} + c_{-\vec{k}r} e^{-i\omega t} \right)$$

$$(49) \quad \dot{a}_{\vec{k},r}^* = \frac{i\omega}{2\sqrt{2\omega V}} \left( c_{\vec{k}r} e^{-i\omega t} - c_{-\vec{k}r}^\dagger e^{i\omega t} \right)$$

$$(50) \quad \dot{a}_{\vec{k},r} = \frac{-i\omega}{2\sqrt{2\omega V}} \left( c_{\vec{k}r} e^{-i\omega t} - c_{-\vec{k}r}^\dagger e^{i\omega t} \right).$$

Ne segue quindi che

$$(51) \quad H = \sum_{\vec{k}r} \frac{\omega}{8} \left[ \left( c_{\vec{k}r} e^{-i\omega t} - c_{-\vec{k}r}^\dagger e^{i\omega t} \right) \left( c_{\vec{k}r} e^{-i\omega t} - c_{-\vec{k}r}^\dagger e^{i\omega t} \right) + \left( c_{\vec{k}r} e^{-i\omega t} - c_{-\vec{k}r}^\dagger e^{i\omega t} \right) \left( c_{\vec{k}r} e^{-i\omega t} - c_{-\vec{k}r}^\dagger e^{i\omega t} \right) + \right.$$

$$(52) \quad \left( c_{\vec{k}r} e^{-i\omega t} + c_{-\vec{k}r}^\dagger e^{i\omega t} \right) \left( c_{\vec{k}r}^\dagger e^{i\omega t} + c_{-\vec{k}r} e^{-i\omega t} \right) + \left( c_{\vec{k}r}^\dagger e^{i\omega t} + c_{-\vec{k}r} e^{-i\omega t} \right) \left( c_{\vec{k}r} e^{-i\omega t} + c_{-\vec{k}r}^\dagger e^{i\omega t} \right) =$$

$$(53) \quad = \sum_{\vec{k}r} \frac{\omega}{8} \left( 2 \{ c_{\vec{k}r}, c_{\vec{k}r}^\dagger \} + 2 \{ c_{-\vec{k}r}, c_{-\vec{k}r}^\dagger \} \right) =$$

$$(54) \quad = \sum_{\vec{k}r} \frac{\omega}{2} \{ c_{\vec{k}r}, c_{\vec{k}r}^\dagger \} = \sum_{\vec{k}r} \omega \left( c_{\vec{k}r}^\dagger c_{\vec{k}r} + \frac{1}{2} \right)$$