DIMOSTRAZIONE RAPIDA DELLA RELAZIONE DI COMPLETEZZA PER GLI SPINORI DI DIRAC

PIERFRANCESCO URBANI

Vogliamo dimostrare rapidamente la relazione di completezza per gli spinori di Dirac senza ricorre alla loro espressione particolare in un'opportuna rappresentazioni delle matrici γ^μ. La relazione di completezza afferma che

$$\sum_r (u_r(p))_\alpha (\bar{u}_r(p))_\beta = \left(\frac{\not{p}+m}{2m}\right)_{\alpha\beta} \tag{1}$$

$$\sum_r (v_r(p))_\alpha (\bar{v}_r(p))_\beta = \left(\frac{\not{p}-m}{2m}\right)_{\alpha\beta} \tag{2}$$

$$\sum_r \left[(u_r(p))_\alpha (\bar{u}_r(p))_\beta - (v_r(p))_\alpha (\bar{v}_r(p))_\beta\right] = \delta_{\alpha\beta} \tag{3}$$

Notiamo immediatamente che dalla dimostrazione delle prime due relazioni discende istantaneamente la terza. Dimostriamo quindi le prime due relazioni. La dimostrazione è possibile anche per diretta ispezione. Tuttavia in questo caso si deve ricorrere all'espressione degli spinori di Dirac cosa che non rende tali relazioni immediatamente invarianti sotto trasformazioni di similitudine delle matrici gamma. Procediamo quindi in un modo più semplice. Innanzitutto ricordiamo che valgono le seguenti relazioni[1]:

$$(\not{p}-m)\,|u_r\rangle = 0 \qquad\qquad (\not{p}+m)\,|v_r\rangle = 0 \tag{4}$$

e le relazioni "duali"[2]

$$\langle u_r|\,(\not{p}-m) = 0 \qquad\qquad \langle v_r|\,(\not{p}+m) = 0 \quad . \tag{5}$$

Inoltre si hanno le seguenti relazioni di normalizzazione

$$\langle u_r|u_s\rangle = \delta_{rs} \qquad \langle v_r|v_s\rangle = -\delta_{rs} \qquad \langle u_r|v_s\rangle = 0 \qquad\quad r,s = 1,2\,. \tag{6}$$

Queste formule sono il punto di partenza della dimostrazione. Dimostriamo prima la relazione (1). Partiamo dalle (4). si ha che

$$(\not{p}+m)\,|u_r\rangle = (\not{p}-m+2m)\,|u_r\rangle = 2m\,|u_r\rangle \tag{7}$$

da cui si ricava che

$$|u_r\rangle = \frac{(\not{p}+m)}{2m}\,|u_r\rangle\ . \tag{8}$$

Analogamente si ha

$$(\not{p}-m)\,|u_r\rangle = (\not{p}+m-2m)\,|v_r\rangle = -2m\,|v_r\rangle \tag{9}$$

$$|v_r\rangle = -\frac{(\not{p}-m)}{2m}\,|v_r\rangle\ . \tag{10}$$

[1] Ricorriamo qui alla notazione di Dirac per indicare gli spinori di Dirac (ha fatto tutto Dirac, non è colpa mia...). Infatti gli spinori di Dirac formano uno spazio vettoriale che è lo spazio lineare delle soluzioni dell'equazione di Dirac. I quattro spinori di Dirac $u_{1,2}$ e $v_{1,2}$ sono una base per tale spazio.

[2] Notiamo che la definizione di relazione duale è qui appropriata. E' infatti noto che la quantità invariante sotto trasformazioni di Lorentz è il prodotto $\bar{u}u$ che in notazione di Dirac prende la forma $\langle u_r|u_r\rangle$ con l'ovvia identificazione $\bar{u} \equiv \langle u|$

Le formule (8) e (10) sono buona parte della dimostrazione. Partiamo dalla (8). Si ha che

$$\delta_{rs} = \langle u_r | u_s \rangle = \langle u_r | \frac{(\not{p} + m)}{2m} | u_s \rangle \tag{11}$$

$$0 = \langle v_r | \frac{(\not{p} + m)}{2m} | v_s \rangle = \langle u_r | \frac{(\not{p} + m)}{2m} | v_s \rangle = \langle v_r | \frac{(\not{p} + m)}{2m} | u_s \rangle \ . \tag{12}$$

Da queste relazioni segue immediatamente che l'operatore

$$\Omega = \frac{(\not{p} + m)}{2m} \tag{13}$$

ha esattamente gli stessi elementi di matrice dell'operatore

$$\Lambda = \sum_r | u_r \rangle \langle u_r | \tag{14}$$

come si può verificare sfruttando le relazioni di ortonormalità (6). Poichè gli spinori sono una base dello spazio vettoriale delle soluzioni dell'equazione di Dirac segue immediatamente che i due operatori Ω e Λ devono coincidere per cui si ha che

$$\sum_r | u_r \rangle \langle u_r | = \frac{(\not{p} + m)}{2m} \tag{15}$$

che è proprio la relazione (1). La seconda relazione (2) si può dimostrare in modo esattamente analogo. Dalla (10) discende che

$$\delta_{rs} = - \langle v_r | v_s \rangle = \langle v_r | \frac{(\not{p} - m)}{2m} | v_s \rangle \tag{16}$$

$$0 = \langle v_r | \frac{(\not{p} - m)}{2m} | v_s \rangle = \langle u_r | \frac{(\not{p} - m)}{2m} | v_s \rangle = \langle v_r | \frac{(\not{p} - m)}{2m} | u_s \rangle \ . \tag{17}$$

Ne segue che gli operatori

$$\Omega' = \frac{(\not{p} - m)}{2m} \tag{18}$$

e

$$\Lambda' = \sum_r | v_r \rangle \langle v_r | \tag{19}$$

hanno gli stessi elementi di matrice e quindi coincidono. Abbiamo quindi ricavato che

$$\sum_r | v_r \rangle \langle v_r | = \frac{(\not{p} - m)}{2m} \tag{20}$$

che è la seconda relazione che volevamo provare.