FUNZIONI DI GREEN

PIERFRANCESCO URBANI

Si vuole sfruttare il formalismo delle funzioni di Green per trovare la soluzione dell'equazione del campo di Klein-Gordon in un potgenziale non nullo. L'equazione che occorre risolvere è la seguente:

$$\left(\Box + m^2\right)\phi(x) = J(x)\,. \tag{0.1}$$

Se definiamo l'equazione per la funzione di Green data da[1]

$$\left(\Box_x + m^2\right)G(x-x') = \delta^4(x-x') \tag{0.2}$$

vediamo subito che la soluzione dell'equazione (0.1) è data da

$$\phi(x) = \int G(x-x')J(x')\,d^4x' + \phi_0(x) \tag{0.3}$$

dove è stata indicata con $\phi_0(x)$ la soluzione dell'equazione di Klein-Gordon omogenea in cui cioè è stato posto $J=0$. Verifichiamo che la (0.3) è effettivamente soluzione della (0.1). Per fare ciò basta dimostrare che

$$\int G(x-x')J(x')\,d^4x' \tag{0.4}$$

è una soluzione particolare della (0.1). Si ha infatti che

$$\left(\Box_x + m^2\right)\int G(x-x')J(x')\,d^4x' = \int J(x')\left(\Box_x + m^2\right)G(x-x')\,d^4x' = \tag{0.5}$$

$$= \int J(x')\delta^4(x-x')d^4x' = J(x)\,.$$

Da queste considerazioni discende quindi che occorre trovare una soluzione dell'equazione associata alla funzione di Green (0.2). Per fare ciò sfrutiamo la trasformata di Fourier. Innanzi tutto vediamo che possiamo risolvere il caso particolare dato dall'equazione nell'origine dello spazio-tempo

$$\left(\Box + m^2\right)G(x) = \delta^4(x)\,. \tag{0.6}$$

Moltiplicando quest'equazione per la fase $e^{ik^\mu x_\mu}$ ed integrando su tutto il volume dello spazio-tempo otteniamo

$$\int e^{ik^\mu x_\mu}\Box G(x)d^4x + m^2\int e^{ik^\mu x_\mu}G(x)d^4x = 1 \tag{0.7}$$

$$\int e^{ik^\mu x_\mu}\Box G(x)d^4x + m^2\tilde{G}(k) = 1$$

[1]Nella scrittura dell'operatore differenziale è stato esplicitamente segnalato il fatto che esso agisce su x e non su x'.

dove è stata indicata con $\tilde{G}(x)$ la trasformata di Fourier di $G(x)$. Valutiamo il seguente integrale:

$$\int e^{ik^\mu x_\mu}\Box G(x)d^4x = \int e^{ik^\mu x_\mu}\partial_\nu\partial^\nu G(x)d^4x = \tag{0.8}$$

$$= \int \partial_\nu \left[e^{ik^\mu x_\mu}\partial^\nu G(x)\right] d^4x - \int ik_\nu e^{ik^\mu x_\mu}\partial^\nu G(x)d^4x =$$

$$= \int_{\partial V} dS_\nu \left[e^{ik^\mu x_\mu}\partial^\nu G(x)\right] - ik_\nu \left\{\int \partial^\nu \left[e^{ik^\mu x_\mu}G(x)\right] d^4x - ik^\nu \int \left[e^{ik^\mu x_\mu}G(x)\right] d^4x\right\} =$$

$$= \int_{\partial V} dS_\nu \left[e^{ik^\mu x_\mu}\partial^\nu G(x)\right] - ik_\nu \int \partial^\nu \left[e^{ik^\mu x_\mu}G(x)\right] d^4x - k_\nu k^\nu \tilde{G}(k)\,.$$

Ora, se la soluzione particolare dell'equazione di Klein-Gordon inomogenea, si annulla all'infinito allora gli ultimi due integrali devono essere nulli. Si ha infatti che tale soluzione è data da

$$\phi_p(x) = \int G(x-x')J(x')d^4x'\,. \tag{0.9}$$

Se deve essere che

$$\lim_{x\to\infty} \phi_p(x) = 0 \tag{0.10}$$

allora deve essere anche che

$$\lim_{x\to\infty} G(x-x') = 0\,. \tag{0.11}$$

Da questo limite segue anche che

$$\lim_{x\to\infty} \partial_\nu G(x-x') = 0$$

e quindi la (0.7) può essere riscritta in questo modo

$$\left[-k_\nu k^\nu + m^2\right]\tilde{G}(k) = 1 \tag{0.12}$$

da cui si ricava che

$$\tilde{G}(k) = \frac{1}{|\vec{k}|^2 + m^2 - (k^0)^2}\,. \tag{0.13}$$

Attraverso l'antitrasformata di Fourier segue che la funzione di Green può essere riscritta formalmente attraverso questo integrale

$$G(x) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4k \frac{e^{-ik^\mu x_\mu}}{m^2 - k_\nu k^\nu} = \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4k \frac{e^{-ik^\mu x_\mu}}{m^2 + k^2 - (k^0)^2} \tag{0.14}$$

Introducendo la variabile $\omega(\vec{k}) = \sqrt{m^2 + |\vec{k}|^2} = \omega\left(-\vec{k}\right)$, l'integrale può essere scritto attraverso la seguente formula

$$G(x) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4k \frac{e^{-ik^\mu x_\mu}}{\omega^2 - (k^0)^2}\,. \tag{0.15}$$

Quest'integrale inoltre, può essere scritto separando la componente spaziale da quella temporale in questo modo

$$G(x) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^3k e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \int_{-\infty}^{+\infty} dk^0 \frac{e^{-ik^0 t}}{\omega^2 - (k^0)^2}\,. \tag{0.16}$$

Valutiamo ora l'integrale definito da

$$G(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^3k e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \int_{-\infty}^{+\infty} dk^0 \frac{e^{-ik^0 t}}{(k^0)^2 - \omega^2} \tag{0.17}$$

che corrisponde alla funzione di Green per il problema

$$-(\Box + m^2)G(x) = \delta^4(x)\,. \tag{0.18}$$

Per calcolare l'integrale sulla parte temporale dobbiamo servirci del metodo dei residui visto che la funzione integranda ha due poli semplici. Inoltre dobbiamo definire due differenti cammini di integrazione nel piano complesso di k^0, a seconda che t sia maggiore o minore di zero.

Caso $t > 0$

In questo caso scegliamo un cammino di integrazione nel piano complesso di k^0 formato da una semicirconferenza inferiore centrata nell'origine di raggio R, dei tratti di asse reale e due semicirconferenze inferiori di raggio $\rho < R$ centrate nei due poli $-\omega$ e $+\omega$. Prendiamo questo cammino orientato positivamente cioè percorriamolo in senso antiorario. Poichè tale cammino non contiene singolarità, il teorema di Cauchy-Goursat ci assicura che l'integrale della funzione

$$\gamma(k^0) = \frac{e^{-ik^0 t}}{(k^0)^2 - \omega^2} \tag{0.19}$$

è nullo. Si ha quindi che

$$0 = \int_{C_L} \gamma(k^0) dk^0 + \int_{C_\rho} \gamma(k^0) dk^0 + \int_{C_R} \gamma(k^0) dk^0\,, \tag{0.20}$$

dove C_L sono i tratti lineari, C_ρ le due semicirconferenza che aggirano i poli e C_R la semicirconferenza esterna. Dalla (0.20) segue che

$$\lim_{\rho\to 0}\lim_{R\to\infty} \int_{-C_L} \gamma(k^0) dk^0 = \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma(k^0) dk^0 = \lim_{\rho\to 0}\lim_{R\to\infty} \left[\int_{C_R} \gamma(k^0) dk^0 - \int_{-C_\rho} \gamma(k^0) dk^0 \right]. \tag{0.21}$$

Valutiamo separatamente gli integrali sulla circonferenza esterna e sulle due più piccole interne.

Integrale su C_R. L'integrale sulla circonferenza più esterna può essere valutato sfruttando il lemma di Jordan. Infatti la funzione

$$\frac{1}{(k^0)^2 - \omega^2} \tag{0.22}$$

può essere maggiorata in questo modo. Innanzitutto dimostriamo che

$$|a - b| \geq |a| - |b|\,; \tag{0.23}$$

si ha che

$$|a| = |a - b + b| \leq |a - b| + |b|$$

da cui si ricava la tesi (nell'ultimo passaggio è stata usata la disuguaglianza triangolare). La funzione (0.22) può essere quindi maggiorata come segue

$$\frac{1}{(k^0)^2 - \omega^2} \leq \frac{1}{|(k^0)^2| - \omega^2} = \frac{1}{R^2 - \omega^2} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0 \tag{0.24}$$

da cui si ricava immediatamente grazie al lemma di Jordan che

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}\gamma(k^0)dk^0 = 0 \tag{0.25}$$

Integrale su C_ρ. Per valutare l'integrale sulle semicirconferenze più piccole che circondano i poli si sfrutta il seguente

Lemma. *Se $f(z)$ è una funzione analitica con un polo semplice in $z = x_0 \in \mathbb{R}$ e se C_ρè la semicirconferenza inferiore che aggira il polo, percorsa in senso antiorario, allora vale la seguente espressione*

$$\lim_{\rho\to\infty}\int_{C_\rho} f(z)\,dz = i\pi \operatorname*{Res}_{z=x_0} f(z)\,. \tag{0.26}$$

Dimostrazione. Se $f(z)$ ha un polo semplice in $z = x_0$ allora è possibile scrivere

$$f(z) = g(z) + \frac{B}{z - x_0} \tag{0.27}$$

dove

$$g(z) = \sum_n g_n(z - x_0)^n\,. \tag{0.28}$$

L'integrale di f sul cammino C_ρ dà quindi

$$\int_{C_\rho} f(z)\,dz = \int_{C_\rho} g(z)\,dz + \int_{C_\rho}\frac{B}{z - x_0}dz \tag{0.29}$$

Ma poichè $g(z)$ ammette uno sviluppo in serie di Taylor, sicuramente sarà limitata per cui possiamo scrivere

$$\int_{C_\rho} g(z)\,dz \le M\rho \underset{\rho\to 0}{\longrightarrow} 0\ . \tag{0.30}$$

Inoltre, se parametrizziamo il cammino di integrazione attraverso

$$C_\rho:\ z(\theta) = x_0 + \rho e^{i\theta} \quad \theta\in[-\pi, 0] \tag{0.31}$$

otteniamo che il secondo integrale può essere scritto attraverso

$$\int_{C_\rho}\frac{B}{z - x_0}dz = \int_{-\pi}^{0} iB = i\pi B = i\pi \operatorname*{Res}_{z=x_0} f(z) \tag{0.32}$$

da cui si ricava proprio la tesi. □

Da questo lemma ricaviamo immediatamente che

$$\int_{-C_\rho}\gamma(k^0)\,dk^0 = i\pi\left[\operatorname*{Res}_{k^0=\omega}\gamma(k^0) + \operatorname*{Res}_{k^0=-\omega}\gamma(k^0)\right]\ . \tag{0.33}$$

Ne segue che l'integrale a tempi positivi per la parte temporale della funzione di Green è dato da

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dk^0 \frac{e^{-ik^0 t}}{(k^0)^2 - \omega^2} = -i\pi\left[\operatorname*{Res}_{k^0=\omega}\gamma(k^0) + \operatorname*{Res}_{k^0=-\omega}\gamma(k^0)\right]\ . \tag{0.34}$$

Se mettiamo insieme questo risultato con il resto dell'integrale per la funzione di Green otteniamo

$$G(x, t>0) = -i\pi\int\frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^4}e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}\left[\operatorname*{Res}_{k^0=\omega}\gamma(k^0) + \operatorname*{Res}_{k^0=-\omega}\gamma(k^0)\right]\ . \tag{0.35}$$

Possiamo riscrivere questo risultato attraverso gli integrali nel piano complesso di k^0 che circondano completamente i due poli. Per fare ciò notiamo subito che se C^+ e C^- sono due cammini di integrazione, percorsi in senso orario, che circondano rispettivamente il polo $k^0 = \omega$ e $k^0 = -\omega$, allora il valore degli integrali della funzione $\gamma(k^0)$ su tali cammini è dato da

$$\int_{C^+} \gamma(k^0)\, dk^0 = -2\pi i \operatorname*{Res}_{k^0=\omega} \gamma(k^0) \tag{0.36}$$

$$\int_{C^-} \gamma(k^0)\, dk^0 = -2\pi i \operatorname*{Res}_{k^0=-\omega} \gamma(k^0) \tag{0.37}$$

Se definiamo inoltre le seguenti due quantità

$$\Delta^+ = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^3k e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \int_{C^+} dk^0 \frac{e^{-ik^0 t}}{(k^0)^2 - \omega^2} \tag{0.38}$$

$$\Delta^- = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^3k e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \int_{C^-} dk^0 \frac{e^{-ik^0 t}}{(k^0)^2 - \omega^2}\,, \tag{0.39}$$

possiamo esprimere la funzione di Green a tempi positivi attraverso questa espressione

$$G(x,t) = \frac{\Theta(t)}{2} \left[\Delta^+ + \Delta^-\right]\,. \tag{0.40}$$

CASO $t < 0$

La funzione di Green a tempi negativi si può ottenere cambiando semplicemente il contorno di integrazione. Infatti basta prendere un cammino che è esattamente il simmetrico rispetto all'asse reale del cammino usato a tempi positivi anche questa volta orientato in senso antiorario. Anche in questo caso si ha quindi

$$0 = \int_{C_L} \gamma(k^0)\, dk^0 + \int_{C_\rho} \gamma(k^0)\, dk^0 + \int_{C_R} \gamma(k^0)\, dk^0 \tag{0.41}$$

da cui si ricava evidentemente come nel caso precedente che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \gamma(k^0)\, dk^0 = \lim_{\rho\to 0} \lim_{R\to\infty} \left[\int_{-C_\rho} \gamma(k^0)\, dk^0 - \int_{C_R} \gamma(k^0)\, dk^0\right]\,. \tag{0.42}$$

Come prima, sfruttando il lemma di Jordan si ricava che

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} \gamma(k^0)\, dk^0 = 0 \tag{0.43}$$

e, ragionando come nel caso a tempi negativi si ha

$$\lim_{\rho\to 0} \int_{-C_\rho} \gamma(k^0)\, dk^0 = \pi i \left[\operatorname*{Res}_{k^0=\omega} \gamma(k^0) + \operatorname*{Res}_{k^0=-\omega} \gamma(k^0)\right]\,. \tag{0.44}$$

Sfruttando l'espressione per le quantità Δ^+ e Δ^- si ricava che

$$G(x,t) = -\frac{\Theta(-t)}{2} \left[\Delta^+ + \Delta^-\right]. \tag{0.45}$$

La funzione definita su tutto l'asse reale dei tempi si ottiene quindi attraverso la somma delle due

$$G(x,t) = \frac{\Theta(t)}{2} \left[\Delta^+ + \Delta^-\right] - \frac{\Theta(-t)}{2} \left[\Delta^+ + \Delta^-\right] \tag{0.46}$$

che può essere riscritta nel seguente modo

$$G(x,t) = \frac{\Delta^+}{2}\left[\Theta(t) - \Theta(-t)\right] + \frac{\Delta^-}{2}\left[\Theta(t) - \Theta(-t)\right] = \tag{0.47}$$

$$= \frac{\Delta^+}{2}\left[\Theta(t) + \Theta(t) - (\Theta(t) + \Theta(-t))\right] + \frac{\Delta^-}{2}\left[\Theta(t) + \Theta(-t) - (\Theta(-t) + \Theta(-t))\right] = \tag{0.48}$$

$$= \Delta^+\Theta(t) - \Delta^-\Theta(-t) + \frac{\Delta^-}{2} - \frac{\Delta^+}{2} = \Delta^+\Theta(t) - \Delta^-\Theta(-t) + \Omega \tag{0.49}$$

dove $\Omega = \frac{\Delta^- - \Delta^+}{2}$ ed è stato usato il fatto che

$$\Theta(t) + \Theta(-t) = 1\ . \tag{0.50}$$

Si può vedere facilmente che Ω è una soluzione per la funzione di Green associata all'equazione di Klein-Gordon omogenea. Infatti verifichiamo che Δ^+ è soluzione dell'equazione stessa:

$$-(\Box + m^2)\int \frac{d^3k}{(2\pi)^4} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \int_{C^+} dk^0 \frac{e^{-ik^0 t}}{(k^0)^2 - \omega^2} = \tag{0.51}$$

$$= (\Box + m^2)\int i\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{e^{-ik^\mu x_\mu}}{2\omega} = \tag{0.52}$$

dove ora $k^\mu = (\omega, \vec{k})$. Si ha quindi che

$$-(\Box + m^2)\int \frac{d^3k}{(2\pi)^4} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \int_{C^+} dk^0 \frac{e^{-ik^0 t}}{(k^0)^2 - \omega^2} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^4}\left(\omega^2 - (k^0)^2\right)\frac{e^{-ik^\mu x_\mu}}{2\omega} = 0 \tag{0.53}$$

da cui si vede che Δ^+ è soluzione dell'omogenea. Analogamente si può far la verifica per Δ^-. In ogni caso, la soluzione generale per l'equazione di Klein Gordon è data da

$$\phi(x) = \phi_0(x) + \int dy\, G(x-y)J(y) \tag{0.54}$$

da cui si vede che basta dare una particolare soluzione per la funzione di Green. La soluzione generale dell'equazione di Green inoltre è data dalla soluzione generale per l'equazione omogenea e da una soluzione particolare. Ne segue che se definisco la particolare soluzione di Green, definita sul cammino di Feynman e data da

$$G_F(x,t) = \Delta^+\Theta(t) - \Delta^-\Theta(-t) \tag{0.55}$$

questa è una buonissima soluzione particolare per l'equazione di Green. Vediamo anche che la funzione di Feynman è data da Δ^+ se $t > 0$ e da Δ^- se $t < 0$.