# Laplaciano in coordinate paraboliche

Il marinaio semplice

26 aprile 2008

Le coordinate paraboliche sono definite nel seguente modo:

$$x = (\xi\eta)^{\frac{1}{2}} cos\varphi$$

$$y = (\xi\eta)^{\frac{1}{2}} sin\varphi$$

$$z = \frac{1}{2}(\xi - \eta)$$

Per trovare l'operatore di Laplace in coordinate paraboliche calcolo il tensore metrico relatico a tale sistema di coordinate:

$$dx = \frac{\eta}{2(\xi\eta)^{\frac{1}{2}}} cos\varphi d\xi + \frac{\xi}{2(\xi\eta)^{\frac{1}{2}}} cos\varphi d\eta - (\xi\eta)^{\frac{1}{2}} sin\varphi d\varphi$$

$$dy = \frac{\eta}{2(\xi\eta)^{\frac{1}{2}}} sin\varphi d\xi + \frac{\xi}{2(\xi\eta)^{\frac{1}{2}}} sin\varphi d\eta - (\xi\eta)^{\frac{1}{2}} cos\varphi d\varphi$$

$$dz = \frac{1}{2}d\xi - \frac{1}{2}d\eta$$

L'elemento infinitesimo di distanza dà l'espressione della forma quadratica associata al tensore metrico:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu = \frac{1}{4}\frac{\xi + \eta}{\xi} d\xi \otimes d\xi + \frac{1}{4}\frac{\xi + \eta}{\eta} d\eta \otimes d\eta + \xi\eta d\varphi \otimes d\varphi$$

Quindi il tensore metrico è dato da:

$$g_{\mu\nu} = diag(\frac{1}{4}\frac{\xi + \eta}{\xi}, \frac{1}{4}\frac{\xi + \eta}{\eta}, \xi\eta)$$

L'inverso del tensore metrico è:

$$g^{\mu\nu} = diag(\frac{4\xi}{\xi + \eta}, \frac{4\eta}{\xi + \eta}, \frac{1}{\xi\eta})$$

La relazione che dà l'operatore di Laplace in coodinate cartesiane è:

$$\nabla^2 f = (\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}) f = g^{\mu\nu} f_{,\mu\nu}$$

dove $g^{\mu\nu} = diag(1,1,1)$. Per varietà riemmanniane si ha che lo spazio è localmente piatto. Ne discende che la relazione scritta in precedenza per il laplaciano in coordinate cartesiane, può essere trasformata nel seguente modo in un'equazione tensoriale:

$$\nabla^2 f = g^{\mu\nu} f_{;\mu\nu} = g^{\mu\nu} (f_{,\mu})_{;\nu}$$

dove nell'ultimo passaggio si è usato il fatto che per una funzione scalare la derivata ordinaria e quella covariante coincidono. Se l'equazione appena scritta, viene espressa in funzione dei coefficienti di connessione affine nel sistema di coordinate paraboliche, si ottiene:

$$\nabla^2 f = g^{\mu\nu} (f_{,\mu})_{;\nu} = g^{\mu\nu} [f_{,\mu\nu} - \Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} f_{,\sigma}]$$

Occorre quindi calcolare i coefficienti di connessione affine per le coordinate paraboliche:

$$\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\sigma\alpha} (g_{\mu\alpha,\nu} + g_{\alpha\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\alpha})$$

I coefficienti non nulli sono:

$$\Gamma^{\xi}_{\xi\xi} = \Gamma^{\eta}_{\xi\xi} = -\frac{1}{2} \frac{\eta}{\xi} \frac{1}{\xi + \eta}$$

$$\Gamma^{\xi}_{\xi\eta} = \Gamma^{\xi}_{\eta\xi} = \Gamma^{\eta}_{\xi\eta} = \Gamma^{\eta}_{\eta\xi} = \frac{1}{2} \frac{1}{\xi + \eta}$$

$$\Gamma^{\varphi}_{\xi\varphi} = \Gamma^{\varphi}_{\varphi\xi} = \frac{1}{2\xi}$$

$$\Gamma^{\varphi}_{\eta\varphi} = \Gamma^{\varphi}_{\varphi\eta} = \frac{1}{2\eta}$$

$$\Gamma^{\xi}_{\eta\eta} = \Gamma^{\eta}_{\eta\eta} = -\frac{1}{2} \frac{\xi}{\eta} \frac{1}{\xi + \eta}$$

$$\Gamma^{\xi}_{\varphi\varphi} = \Gamma^{\eta}_{\varphi\varphi} = -\frac{2\xi\eta}{\xi + \eta}$$

Il Laplaciano in coordinate paraboliche è quindi:

$$\nabla^2_{\eta,\xi,\varphi} f = g^{\mu\nu} (f_{,\mu})_{;\nu} = g^{\mu\nu} [f_{,\mu\nu} - \Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} f_{,\sigma}] =$$

$$= g^{\xi\xi} (f_{,\xi\xi} - \Gamma^{\sigma}_{\xi\xi} f_{,\sigma}) + g^{\eta\eta} (f_{,\eta\eta} - \Gamma^{\sigma}_{\eta\eta} f_{,\sigma}) + g^{\varphi\varphi} (f_{,\varphi\varphi} - \Gamma^{\sigma}_{\varphi\varphi} f_{,\sigma}) =$$

$$= g^{\xi\xi}(f_{,\xi\xi}-\Gamma^{\xi}_{\xi\xi}f_{,\xi}-\Gamma^{\eta}_{\xi\xi}f_{,\eta})+g^{\eta\eta}(f_{,\eta\eta}-\Gamma^{\eta}_{\eta\eta}f_{,\eta}-\Gamma^{\xi}_{\eta\eta}f_{,\xi})+g^{\varphi\varphi}(f_{,\varphi\varphi}-\Gamma^{\xi}_{\varphi\varphi}f_{,\xi}-\Gamma^{\eta}_{\varphi\varphi}f_{,\eta}) =$$

$$\frac{4\xi}{\xi+\eta}[\frac{\partial^2 f}{\partial\xi^2}+\frac{1}{2}\frac{\eta}{\xi}\frac{1}{\xi+\eta}\frac{\partial f}{\partial\xi}+\frac{1}{2}\frac{\eta}{\xi}\frac{1}{\xi+\eta}\frac{\partial f}{\partial\eta}]+\frac{4\eta}{\xi+\eta}[\frac{\partial^2 f}{\partial\eta^2}+\frac{1}{2}\frac{\xi}{\eta}\frac{1}{\xi+\eta}\frac{\partial f}{\partial\eta}+\frac{1}{2}\frac{\xi}{\eta}\frac{1}{\xi+\eta}\frac{\partial f}{\partial\xi}]+$$

$$+\frac{1}{\xi\eta}[\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}+\frac{2\xi\eta}{\xi+\eta}\frac{\partial f}{\partial\xi}+\frac{2\xi\eta}{\xi+\eta}\frac{\partial f}{\partial\eta}] =$$

$$= \frac{4\xi}{\xi+\eta}\frac{\partial^2 f}{\partial\xi^2}+\frac{4\eta}{\xi+\eta}\frac{\partial^2 f}{\partial\eta^2}+\frac{2\eta}{(\xi+\eta)^2}\frac{\partial f}{\partial\xi}+\frac{2\xi}{(\xi+\eta)^2}\frac{\partial f}{\partial\xi}+\frac{2\eta}{(\xi+\eta)^2}\frac{\partial f}{\partial\eta}+\frac{2\xi}{(\xi+\eta)^2}\frac{\partial f}{\partial\eta}+$$

$$+\frac{1}{\xi\eta}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}-\frac{2}{\xi+\eta}(\frac{\partial f}{\partial\eta}+\frac{\partial f}{\partial\xi}) =$$

$$= [\frac{4\xi}{\xi+\eta}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+\frac{4\eta}{\xi+\eta}\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}]f+\frac{4}{\xi+\eta}[\frac{\partial}{\partial\eta}+\frac{\partial}{\partial\xi}]f+\frac{1}{\xi\eta}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2} =$$

$$= \{\frac{4}{\xi+\eta}[\frac{\partial}{\partial\xi}(\xi\frac{\partial}{\partial\xi})+\frac{\partial}{\partial\eta}(\eta\frac{\partial}{\partial\eta})]+\frac{1}{\xi\eta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\}f$$

Ne segue che l'operatore laplaciano in coordinate paraboliche è:

$$\nabla^2_{\xi,\eta,\varphi} = \frac{4}{\xi+\eta}[\frac{\partial}{\partial\xi}(\xi\frac{\partial}{\partial\xi})+\frac{\partial}{\partial\eta}(\eta\frac{\partial}{\partial\eta})]+\frac{1}{\xi\eta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$$