Formule di Rodriguez-Zorro

Il marinaio semplice

28 agosto 2008

Su richiesta del Timoniere ho trascritto le dimostrazioni delle formule 3.45 e 3.44 del Bransden. Sul libro si suggerisce di ricavarle a partire dalla funzione generatrice dei polinomi di Laguerre. Tuttavia non è necessario ricorre alla funzione generatrice per dimostrare le formule ma basta semplicemente usare la definizione dei polinomi di Laguerre.

Entrambe le formule hanno a che fare con i polinomi di Laguerre. Essi sono definiti dalla seguente formula:

$$L_q(r) = e^r \frac{d^q}{dr^q}(r^q e^{-r})$$

Tale definizione consente di ricavare due formule ricorsive per i polinomi di Laguerre. Come espresso nel titolo, le formule sono attribuite al signor Rodriguez-Enriquez-Aranjuez-Marquez-Zorro che non aveva nient'altro da fare durante il giorno (e credo anche la notte...).

1 Prima Formula

Sia $L_q(r)$ il polinomio di Laguerre definito dalla formula precedente. Allora vale la seguente relazione:

$$\frac{dL_q}{dr} - q\frac{dL_{q-1}}{dr} + qL_{q-1} = 0$$

Proof: La dimostrazione si fa per semplice ispezione (da bravo ispettore Gadget):

$$\frac{dL_q}{dr} = \frac{d}{dr}[e^r \frac{d^q}{dr^q}(r^q e^{-r})] = e^r \frac{d^q}{dr^q}(r^q e^{-r}) + e^r \frac{d^{q+1}}{dr^{q+1}}(r^q e^{-r}) =$$

$$= L_q + e^r \frac{d^q}{dr^q}(qr^{q-1}e^{-r} - r^q e^{-r}) = L_q + qe^r \frac{d^q}{dr^q}(r^{q-1}e^{-r}) - L_q =$$

$$= q\frac{d}{dr}[e^r \frac{d^{q-1}}{dr^{q-1}}(r^{q-1}e^{-r})] - qL_{q-1} = q\frac{d}{dr}L_{q-1} - qL_{q-1}$$

Da cui osservando l'inizio e la fine della catena di uguaglianze si ricava che:

$$\frac{dL_q}{dr} - q\frac{dL_{q-1}}{dr} + qL_{q-1} = 0$$

E questo conclude la dimostrazione.

2 Seconda Formula

Per la seconda dimostrazione non basta usare la semplice ispezione ma occore fare qualche magheggio in più, anche se per nulla complicato. Come prima, mi riprometto di usare la definizione dei polinomi di Laguerre. Tuttavia qui farò uso della formula di Liebnitz per le derivate che si può facilmente dimostrare per induzione. Tale formula è:

$$\frac{d^n}{dx^n}(ab) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{d^k a}{dx^k} \frac{d^{n-k} b}{dx^{n-k}}$$

La formula che si vuole dimostrare è:

$$L_{q+1} + (r - 1 - 2q)L_q + q^2 L_{q-1} = 0$$

Proof: Dalla definizione di polinomio di Laguerre si ricava che:

$$L_{q+1} = e^r \frac{d^{q+1}}{dr^{q+1}}(r^{q+1}e^{-r}) = e^r \sum_{i=0}^{q+1} \binom{q+1}{i} \frac{d^i}{dr^i}(r) \frac{d^{q+1-i}}{dr^{q+1-i}}(r^q e^{-r}) =$$

$$= e^r [r \frac{d^{q+1}}{dr^{q+1}}(r^q e^{-r}) + (q+1)\frac{d^q}{dr^q}(r^q e^{-r})] =$$

$$= re^r \frac{d^{q+1}}{dr^{q+1}\frac{d}{dr}}(r^q e^{-r}) + (q+1)L_q = r\frac{d}{dr}L_q - rL_q + (q+1)L_q =$$

$$= r\frac{d}{dr}L_q + (q + 1 - r)L_q$$

da cui, osservando la parte iniziale e finale dell'equazione si ricava che:

$$L_{q+1} = r\frac{d}{dr}L_q + (q + 1 - r)L_q$$

Mandando $q + 1 \to q$ ottengo la seguente relazione:

$$L_q = r\frac{d}{dr}L_{q-1} + (q - r)L_{q-1}$$

Moltiplico tale relazione per q:

$$qL_q = qr\frac{d}{dr}L_{q-1} + q(q - r)L_{q-1}$$

Sottraendo questa relazione alla relazione trovata in precedenza per L_{q+1} ottengo:

$$L_{q+1} - qL_q = r[\frac{d}{dr}L_q - q\frac{d}{dr}L_{q-1}] + (q+1-r)L_q - q(q-r)L_{q-1}$$

A questo punto sfrutto la relazione trovata nella prima parte di questo scritto secondo cui:

$$\frac{d}{dr}L_q - q\frac{d}{dr}L_{q-1} = -qL_{q-1}$$

Ottengo quindi:

$$L_{q+1} - qL_q = (q+1-r)L_q - q^2L_{q-1}$$

Che riscritta in un modo più conforme dà:

$$L_{q+1} + (r-1-2q)L_q + q^2L_{q-1} = 0$$

Cioè la tesi.

3 Appendice: Formula di Leibniz

Per chi non l'avesse mai incontrata, fornisco una dimostrazione della formula di Leibnitz. La dimostrazione può condursi facilmente per induzione. La formula di Leibniz, come scritto in precendenza, afferma che:

$$\frac{d^n}{dx^n}(ab) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{d^ka}{dx^k}\frac{d^{n-k}b}{dx^{n-k}}$$

Si può usare verificare che la formula è vera senz'altro per $n = 0, 1$. Per ottenere la dimostrazione basta dare per buona la formula per n e verificare che tale assunzione porta alla formula per $n + 1$. In particolare, si ha:

$$\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}(ab) = \frac{d}{dx}[\frac{d^n}{dx^n}(ab)] = \frac{d}{dx}[\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{d^ka}{dx^k}\frac{d^{n-k}b}{dx^{n-k}}] =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{d^{k+1}a}{dx^{k+1}}\frac{d^{n-k}b}{dx^{n-k}} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{d^ka}{dx^k}\frac{d^{n-k+1}b}{dx^{n-k+1}}$$

riunendo i termini con lo stesso valore di k si ha:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{d^{k+1}a}{dx^{k+1}}\frac{d^{n-k}b}{dx^{n-k}} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{d^ka}{dx^k}\frac{d^{n-k+1}b}{dx^{n-k+1}} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} \frac{d^ka}{dx^k}\frac{d^{n-k}b}{dx^{n-k}} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{d^ka}{dx^k}\frac{d^{n-k+1}b}{dx^{n-k+1}} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \frac{d^k a}{dx^k} \frac{d^{n+1-k} b}{dx^{n+1-k}}$$

cioè la tesi. Nell'ultimo passaggio si è usata la seguente relazione:

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$$

infatti si ha:

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k-1)!} + \frac{n!}{k!(n-k)!} =$$

$$= \frac{n!k(n+1-k)(n-k) + n!(n+1-k)}{k!(n+1-k)!} =$$

$$= \frac{k(n-k)(n+1)! - k^2(n-k)n! + (n+1)! - kn!}{k!(n+1-k)!} =$$

$$= \frac{k(n-k)(n+1)! - kn!(n-k+k+1) + (n+1)!}{k!(n+1-k)!} =$$

$$\frac{k(n-k)(n+1)! - kn!(n+1) + (n+1)!}{k!(n+1-k)!} = \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = \binom{n+1}{k}$$

L'ultima eguaglianza in realtà è la dimostrazione algebrica del metodo empirico e ricorsivo per ricavare il triangolo di Tartaglia.