TEOREMA SPIN-STATISTICA

PIERFRANCESCO URBANI

1. Fermioni

Supponiamo di avere una lagrangiana per un campo spinoriale libero

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}\left(i\partial\!\!\!/ - m\right)\psi \,. \tag{1}$$

Dalle equazioni del moto si ricava che il campo può essere scritto nel seguente modo

$$\psi(x) = \sum_{\vec{p}r} \sqrt{\frac{m}{E_p V}} \left[a_r(\vec{p}) u_r(\vec{p}) e^{-ip^\mu x_\mu} + b_r^\dagger(\vec{p}) v_r(\vec{p}) e^{ip^\mu x_\mu}\right] \tag{2}$$

dove a e b sono gli operatori di distruzione rispettivamente per le particelle e per le antiparticelle. Tali operatori sono ovviamente dati da

$$a_r(\vec{p}) = \sqrt{\frac{m}{E_p V}} e^{iE_p t} \int_V u_r^\dagger(\vec{p}) \psi(x) e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} d^3x = \sqrt{\frac{m}{E_p V}} e^{iE_p t} \int_V \bar{u}_r(\vec{p}) \gamma^0 \psi(x) e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} d^3x \tag{3}$$

$$b_r^\dagger(\vec{p}) = \sqrt{\frac{m}{E_p V}} e^{-iE_p t} \int_V v_r^\dagger(\vec{p}) \psi(x) e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} d^3x = \sqrt{\frac{m}{E_p V}} e^{-iE_p t} \int_V \bar{v}_r(\vec{p}) \gamma^0 \psi(x) e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} d^3x \tag{4}$$

Ne segue che

$$a_r^\dagger(\vec{p}) = \sqrt{\frac{m}{E_p V}} e^{-iE_p t} \int_V \psi^\dagger(x) u_r(\vec{p}) e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} d^3x = \sqrt{\frac{m}{E_p V}} e^{-iE_p t} \int_V \bar{\psi}(x) \gamma^0 u_r(\vec{p}) e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} d^3x \tag{5}$$

$$b_r(\vec{p}) = \sqrt{\frac{m}{E_p V}} e^{iE_p t} \int_V \psi^\dagger(x) v_r(\vec{p}) e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} d^3x = \sqrt{\frac{m}{E_p V}} e^{iE_p t} \int_V \bar{\psi}(x) \gamma^0 v_r(\vec{p}) e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} d^3x \,. \tag{6}$$

La quantizzazione canonica, svolta sulla lagrangiana (1) porta alla definizione delle seguenti quantità

$$\pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = i\psi^\dagger(x) \tag{7}$$

$$\left[\psi_\alpha(\vec{x}),\ \pi_\beta(\vec{y})\right]_\pm = i\delta_{\alpha\beta}\delta\left(\vec{x}-\vec{y}\right) \implies \left[\psi_\alpha(\vec{x}),\ \psi_\beta^\dagger(\vec{y})\right]_\pm = \delta_{\alpha\beta}\delta\left(\vec{x}-\vec{y}\right) \tag{8}$$

in cui si è resa evidente la volontà di scegliere a posteriori fra relazioni di commutazione e relazioni di anticommutazione. Calcoliamo ora le seguenti quantità

$$\left[a_r(\vec{p}),\ a_s^\dagger(\vec{k})\right]_\pm = \frac{m}{V\sqrt{E_p E_k}} e^{i\left(E_p - E_k\right)t} \sum_{\alpha\beta} \int_V d^3\vec{x} \int_V d^3\vec{y} e^{i\left(\vec{k}\cdot\vec{y} - \vec{p}\cdot\vec{x}\right)} \left[u_{r\alpha}^\dagger(\vec{p})\psi_\alpha(\vec{x}),\ \psi_\beta^\dagger(\vec{y}) u_{s\beta}(\vec{k})\right]_\pm = \tag{9}$$

$$= \frac{m}{V\sqrt{E_p E_k}} e^{i\left(E_p - E_k\right)t} \sum_{\alpha\beta} \int_V d^3\vec{x} \int_V d^3\vec{y} e^{i\left(\vec{k}\cdot\vec{y} - \vec{p}\cdot\vec{x}\right)} u_{r\alpha}^\dagger(\vec{p}) u_{s\beta}(\vec{k}) \left[\psi_\alpha(\vec{x}),\ \psi_\beta^\dagger(\vec{y})\right]_\pm = \tag{10}$$

$$= \frac{m}{V\sqrt{E_p E_k}} e^{i\left(E_p - E_k\right)t} \sum_{\alpha\beta} \int_V d^3\vec{x} \int_V d^3\vec{y} e^{i\left(\vec{k}\cdot\vec{y} - \vec{p}\cdot\vec{x}\right)} u_{r\alpha}^\dagger(\vec{p}) u_{s\beta}(\vec{k}) \delta_{\alpha\beta}\delta\left(\vec{x}-\vec{y}\right) = \tag{11}$$

$$= \frac{m}{V\sqrt{E_p E_k}} e^{i\left(E_p - E_k\right)t} \int_V d^3\vec{x} e^{i\left(\vec{k}-\vec{p}\right)\cdot\vec{x}} u_r^\dagger(\vec{p}) u_s(\vec{k}) = \tag{12}$$

$$= \frac{m}{V\sqrt{E_p E_k}} e^{i\left(E_p - E_k\right)t} V \delta_{\vec{p},\vec{k}} u_r^\dagger(\vec{p}) u_s(\vec{k}) = \tag{13}$$

$$= \delta_{\vec{p},\vec{k}} \delta_{rs} \,. \tag{14}$$

In definitiva si ha quindi

$$\left[a_r(\vec{p}),\ a_s^\dagger(\vec{k})\right]_\pm = \delta_{\vec{p},\vec{k}} \delta_{rs} \,. \tag{15}$$

Eseguiamo ora lo stesso calcolo per gli operatori b. Si ha che

$$\left[b_r(\vec{p}),\ b_s^\dagger(\vec{k})\right]_\pm = \frac{m}{V\sqrt{E_pE_k}}e^{i\left(E_p-E_k\right)t}\sum_{\alpha\beta}\int_V d^3\vec{x}\int_V d^3\vec{y}e^{i\left(\vec{k}\cdot\vec{y}-\vec{p}\cdot\vec{x}\right)}\left[\psi_\beta^\dagger(\vec{x})v_{s\beta}(\vec{p}), v_{r\alpha}^\dagger(\vec{k})\psi_\alpha(\vec{y})\ \right]_\pm = \tag{16}$$

$$= \frac{m}{V\sqrt{E_pE_k}}e^{i\left(E_p-E_k\right)t}\sum_{\alpha\beta}\int_V d^3\vec{x}\int_V d^3\vec{y}e^{i\left(\vec{k}\cdot\vec{y}-\vec{p}\cdot\vec{x}\right)}v_{r\alpha}^\dagger(\vec{k})v_{s\beta}(\vec{p})\left[\psi_\beta^\dagger(\vec{x}), \psi_\alpha(\vec{y})\ \right]_\pm = \tag{17}$$

$$= \pm\frac{m}{V\sqrt{E_pE_k}}e^{i\left(E_p-E_k\right)t}\sum_{\alpha\beta}\int_V d^3\vec{x}\int_V d^3\vec{y}e^{i\left(\vec{k}\cdot\vec{y}-\vec{p}\cdot\vec{x}\right)}v_{r\alpha}^\dagger(\vec{k})v_{s\beta}(\vec{p})\left[\psi_\alpha(\vec{y}), \psi_\beta^\dagger(\vec{x})\ \right]_\pm = \tag{18}$$

$$= \pm\delta_{rs}\delta_{\vec{p},\vec{k}} \tag{19}$$

In definitiva si ha quindi che

$$\left[a_r(\vec{p}),\ a_s^\dagger(\vec{k})\right]_\pm = \delta_{\vec{p},\vec{k}}\delta_{rs} \tag{20}$$

$$\left[b_r(\vec{p}),\ b_s^\dagger(\vec{k})\right]_\pm = \pm\delta_{rs}\delta_{\vec{p},\vec{k}} \tag{21}$$

cioè si vede che se vengono imposte regole di anticommutazione la teoria rimane simmetrica sotto lo scambio di particelle con antiparticelle. Poichè in una teoria libera non c'è alcuna differenza su cosa definiamo particelle o antiparticelle deve essere che i campi fermionici devono sottostare a regole di anticommutazione.

2. Bosoni

Supponiamo di avere la lagrangiana di un bosone di massa m

$$\mathcal{L} = \partial_\mu\phi^\dagger\partial^\mu\phi - m^2\phi^\dagger\phi\,. \tag{22}$$

La soluzione delle equazioni del moto libero danno la seguente espansione per il campo ϕ

$$\phi(x) = \sum_{\vec{p}}\sqrt{\frac{1}{2VE_p}}\left[a(\vec{p})e^{-ip^\mu x_\mu} + b^\dagger(\vec{p})e^{ip^\mu x_\mu}\right]\ . \tag{23}$$

La quantizzazione canonica porta a

$$\pi(x) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}} = \dot{\phi}^\dagger(x) \tag{24}$$

$$\left[\phi(\vec{x}), \pi(\vec{y})\right]_\pm = \left[\phi(\vec{x}), \dot{\phi}^\dagger(\vec{y})\right]_\pm = i\delta\left(\vec{x}-\vec{y}\right)\ . \tag{25}$$

I rispettivi operatori di creazione e distruzione che compaiono in (23) possono essere calcolati attraverso questo ragionamento: calcoliamo il seguente integrale

$$\sqrt{\frac{2E_p}{V}}\int_V \phi(x)e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}}d^3x = a(\vec{p})e^{-iE_pt} + b^\dagger(-\vec{p})e^{iE_pt} \tag{26}$$

e successivamente valutiamo la seguente quantità

$$\dot{\phi}(x) = -i\sum_{\vec{p}}\sqrt{\frac{E_p}{2V}}\left[a(\vec{p})e^{-ip^\mu x_\mu} - b^\dagger(\vec{p})e^{ip^\mu x_\mu}\right] \tag{27}$$

da cui si ricava che

$$\frac{i\sqrt{2}}{\sqrt{VE_p}}\int_V \dot{\phi}(x)e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}}d^3x = a(\vec{p})e^{-iE_pt} - b^\dagger(\vec{p})e^{iE_pt}\,. \tag{28}$$

Combinando linearmente la (26) e la (28) si ottengono le seguenti espressioni

$$a(\vec{p}) = \frac{e^{iE_pt}}{2}\int_V\left(\sqrt{\frac{2E_p}{V}}\phi(x) + \frac{i\sqrt{2}}{\sqrt{VE_p}}\dot{\phi}(x)\right)e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}}d^3x \tag{29}$$

$$b^\dagger(\vec{p}) = \frac{e^{-iE_pt}}{2}\int_V\left(\sqrt{\frac{2E_p}{V}}\phi(x) - \frac{i\sqrt{2}}{\sqrt{VE_p}}\dot{\phi}(x)\right)e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}}d^3x \tag{30}$$

da cui si ricavano anche le seguenti

$$a^\dagger(\vec{p}) = \frac{e^{-iE_pt}}{2}\int_V\left(\sqrt{\frac{2E_p}{V}}\phi^\dagger(x) - \frac{i\sqrt{2}}{\sqrt{VE_p}}\dot{\phi}^\dagger(x)\right)e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}}d^3x \tag{31}$$

$$b(\vec{p}) = \frac{e^{iE_pt}}{2}\int_V \left(\sqrt{\frac{2E_p}{V}}\phi^\dagger(x) + \frac{i\sqrt{2}}{\sqrt{VE_p}}\dot{\phi}^\dagger(x)\right) e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} d^3x\,. \tag{32}$$

A questo punto possiamo calcolare i commutatori

$$\left[a_r(\vec{p}),\ a_s^\dagger(\vec{k})\right]_\pm = \frac{e^{i\left(E_p-E_k\right)t}}{4}\int_V d^3x\int_V d^3y e^{i\left(\vec{k}\cdot\vec{y}-\vec{p}\cdot\vec{x}\right)}\left[\sqrt{\frac{2E_p}{V}}\phi(\vec{x}) + \frac{i\sqrt{2}}{\sqrt{VE_p}}\dot{\phi}(\vec{x}),\ \sqrt{\frac{2E_k}{V}}\phi^\dagger(\vec{y}) - \frac{i\sqrt{2}}{\sqrt{VE_k}}\dot{\phi}^\dagger(\vec{y})\right]_\pm = \tag{33}$$

$$= \frac{e^{i\left(E_p-E_k\right)t}}{4}\int_V d^3x\int_V d^3y e^{i\left(\vec{k}\cdot\vec{y}-\vec{p}\cdot\vec{x}\right)}\frac{2}{V}\left\{-i\sqrt{\frac{E_p}{E_k}}\left[\phi(\vec{x}), \dot{\phi}^\dagger(\vec{y})\ \right]_\pm + i\sqrt{\frac{E_k}{E_p}}\left[\dot{\phi}(\vec{x}),\ \phi(\vec{y})\right]_\pm\right\} = \tag{34}$$

$$= \frac{e^{i\left(E_p-E_k\right)t}}{4}\int_V d^3x\int_V d^3y e^{i\left(\vec{k}\cdot\vec{y}-\vec{p}\cdot\vec{x}\right)}\frac{2}{V}\left\{-i\sqrt{\frac{E_p}{E_k}}\left[\phi(\vec{x}),\ \dot{\phi}^\dagger(\vec{y})\right]_\pm + i\sqrt{\frac{E_k}{E_p}}\left[\dot{\phi}(\vec{x}),\ \phi^\dagger(\vec{y})\right]_\pm\right\} = \tag{35}$$

$$= \frac{e^{i\left(E_p-E_k\right)t}}{4}\int_V d^3x\int_V d^3y e^{i\left(\vec{k}\cdot\vec{y}-\vec{p}\cdot\vec{x}\right)}\frac{2}{V}\left(\sqrt{\frac{E_p}{E_k}} + \sqrt{\frac{E_k}{E_p}}\right)\delta\left(\vec{x}-\vec{y}\right) = \tag{36}$$

$$= \frac{e^{i\left(E_p-E_k\right)t}}{2}\int_V d^3x\frac{e^{i\left(\vec{k}-\vec{p}\right)\cdot\vec{x}}}{V}\left(\sqrt{\frac{E_p}{E_k}} + \sqrt{\frac{E_k}{E_p}}\right) = \delta_{\vec{p},\vec{k}}\,. \tag{37}$$

Per l'altro commutatore invece si ha

$$\left[b_r(\vec{p}),\ b_s^\dagger(\vec{k})\right]_\pm = \frac{e^{i\left(E_p-E_k\right)t}}{4}\int_V d^3x\int_V d^3y e^{i\left(\vec{p}\cdot\vec{x}-\vec{k}\cdot\vec{y}\right)}\left[\sqrt{\frac{2E_p}{V}}\phi^\dagger(\vec{x}) + \frac{i\sqrt{2}}{\sqrt{VE_p}}\dot{\phi}^\dagger(\vec{x}),\ \sqrt{\frac{2E_k}{V}}\phi(\vec{y}) - \frac{i\sqrt{2}}{\sqrt{VE_k}}\dot{\phi}(\vec{y})\right]_\pm = \tag{38}$$

$$= \frac{e^{i\left(E_p-E_k\right)t}}{4}\int_V d^3x\int_V d^3y e^{i\left(\vec{p}\cdot\vec{x}-\vec{k}\cdot\vec{y}\right)}\frac{2}{V}\left\{-i\sqrt{\frac{E_p}{E_k}}\left[\phi^\dagger(\vec{x}),\ \dot{\phi}(\vec{y})\right]_\pm + i\sqrt{\frac{E_k}{E_p}}\left[\dot{\phi}^\dagger(\vec{x}),\ \phi(\vec{y})\right]_\pm\right\} = \tag{39}$$

$$= \mp\frac{e^{i\left(E_p-E_k\right)t}}{4}\int_V d^3x\int_V d^3y e^{-i\left(\vec{k}\cdot\vec{y}-\vec{p}\cdot\vec{x}\right)}\frac{2}{V}\left\{\sqrt{\frac{E_p}{E_k}} + \sqrt{\frac{E_k}{E_p}}\right\}\delta\left(\vec{x}-\vec{y}\right) = \tag{40}$$

$$= \mp\frac{e^{i\left(E_p-E_k\right)t}}{4}\int_V d^3x e^{-i\left(\vec{k}-\vec{p}\right)\cdot\vec{x}}\frac{2}{V}\left\{\sqrt{\frac{E_p}{E_k}} + \sqrt{\frac{E_k}{E_p}}\right\} = \tag{41}$$

$$= \mp\delta_{\vec{p},\vec{k}}\,. \tag{42}$$

In definitiva si hanno le seguenti regole

$$\left[a_r(\vec{p}),\ a_s^\dagger(\vec{k})\right]_\pm = \delta_{\vec{p},\vec{k}} \tag{43}$$

$$\left[b_r(\vec{p}),\ b_s^\dagger(\vec{k})\right]_\pm = \mp\delta_{\vec{p},\vec{k}}\,. \tag{44}$$

Per una teoria libera non può esserci nessuna differenza tra particelle e antiparticelle per cui per il caso bosonico dobbiamo scegliere regole di commutazione.