

Decomposizione del prodotto di tre rappresentazioni fondamentali di $SU(2)$ e di $SU(3)$

Timoniere

July 9, 2009

Abstract

Si vuole mostrare che in $SU(3)$ è valida la decomposizione

$$3 \otimes 3 \otimes 3 = 10_S + 10_{MS} + 10_{MA} + 1_A$$

e che in $SU(2)$ vale invece

$$2 \otimes 2 \otimes 2 = 4_S + 2_{MS} + 2_{MA} .$$

Con N si indica la dimensione della rappresentazione del gruppo in un certo spazio vettoriale ed i pedici indicano le proprietà degli elementi di questi spazio sotto permutazione degli indici. 3 e 2 indicano le rappresentazioni fondamentali dei due gruppi.

Questa notazione non è la migliore visto che non è fedele. Ad esempio, in $SU(2)$, la dimensione della rappresentazione fondamentale è la stessa di quella dei tensori antisimmetrici.

Successivamente se ne introduce una nuova. Inoltre si vuole far vedere che le due decomposizioni sono in realtà molto simili. Questo tipo di decomposizione si trova facilmente. Quel che mi risultava più difficile era riconoscere la simmetria dei vari multipletti. Quindi ho cercato di procedere di forza bruta.

Conoscere la simmetria delle rappresentazioni è necessario se si vogliono ritrovare i multipletti dei barioni e dei mesoni interpretati nel modello statico a quark.

Elementi di queste rappresentazioni prodotto sono tensori con tre indici contravarianti T^{ijk} .

Notiamo che un tensore con due indici è immediatamente decomponibile in un pezzo simmetrico e in un pezzo antisimmetrico:

$$T^{ij} = \frac{1}{2}(T^{ij} + T^{ji}) + \frac{1}{2}(T^{ij} - T^{ji}) \equiv S^{ij} + A^{ij} .$$

In $SO(3)$ questo ci permette di scrivere

$$3 \otimes 3 = 5_S \oplus 3_A \oplus 1_S$$

essendo 5 la rappresentazione dei tensori simmetrici a traccia nulla, 3 la rappresentazione dei tensori antisimmetrici, ed 1 la traccia. Possiamo scrivere la precedente decomposizione perchè le proprietà del tensore sotto permutazione degli indici restano invariate sotto l'applicazione degli elementi del gruppo e dunque ogni sottospazio va in se stesso.

Per esempio, estraendo la traccia dal pezzo simmetrico $T = \delta^{ij} S^{ij}$ ed osservando $(\delta')^{ij} = O^{il} O^{jm} \delta^{lm} = \delta^{ij}$, si osserva che

$$T' = \delta^{ij} S'^{ij} = \delta^{ij} O^{im} O^{jl} S^{ml} = O^{jm} (O^T)^{lj} S^{ml} = \delta^{ml} S^{ml}$$

ed in modo analogo si fa per gli altri due tensori.

Ora vogliamo generalizzare questo tipo di decomposizione ad un tensore con tre indici. Dopo un po' di tentativi ci si convince che

$$2S^{ijk} = T^{ijk} + T^{jki} + T^{kij} + T^{jik} + T^{ikj} + T^{kji}$$

è un tensore simmetrico, mentre

$$2A^{ijk} = T^{ijk} + T^{jki} + T^{kij} - T^{jik} - T^{ikj} - T^{kji}$$

è un tensore antisimmetrico. Dunque possiamo scrivere

$$T^{ijk} = S^{ijk} + A^{ijk} - T^{jki} - T^{kij}$$

da cui si ottiene facilmente lo sviluppo

$$T^{ijk} = S^{ijk} + A^{ijk} + \sigma^{ijk} + \alpha^{ijk},$$

avendo definito $\sigma^{ijk} = -(T^{kij} + T^{jik})$ ed $\alpha^{ijk} = T^{jik} - T^{jki}$.

Rispetto al caso semplice in cui c'erano due indici, ora non siamo riusciti a decomporre il tensore in una parte simmetrica ed una antisimmetrica, ma c'è dell'altro.

I due ulteriori tensori hanno tuttavia una qualche peculiarità; essi sono, rispettivamente, simmetrico ed antisimmetrico per lo scambio di $k - j$ e di $i - k$. Prima di occuparci di questi due termini vediamo a che rappresentazione appartengono i primi due tensori.

Il primo, essendo totalmente simmetrico, appartiene allo spazio dei tensori simmetrici di dimensione

$$d_S = \sum_{s=1}^N \frac{1}{2} s(s+1) = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^N s + \frac{1}{2} \sum_{s=1}^N s^2.$$

Infatti, possiamo eseguire questo calcolo con il metodo di Gauss, calcolando, invece che l'area del triangolo, il volume della piramide. Immaginiamo infatti le componenti di questo tensore totalmente simmetrico come quelle di una matrice tridimensionale di ordine N , dove N nel nostro caso è 3 oppure 2. Calcoliamo questo volume sommando allora le diverse "superfici" al variare dell'altezza della piramide.

Usando il risultato dell'appendice 1 otteniamo

$$d_S = \frac{1}{2} \frac{N}{2} (N+1) + \frac{1}{2} N \left\{ \frac{2N^2 + 3N + 1}{6} \right\}.$$

Nella decomposizione del prodotto di tre rappresentazioni fondamentali di $SU(3)$, la dimensione dello spazio dei tensori simmetrici è $3 + 7 = 10$. Nella decomposizione del prodotto delle analoghe rappresentazioni di $SU(2)$ questo spazio ha dimensione $3/2 + 5/2 = 4$.

Il tensore completamente antisimmetrico ha componenti nulle per ogni indice ripetuto. Questo fa sì che appartenga ad uno spazio di dimensione

$$d_A = \binom{N}{3}.$$

Nella prima decomposizione questo spazio avrà allora dimensione 1 mentre nella seconda, avrà dimensione 0. E' infatti impossibile provare a costruire un tensore completamente antisimmetrico con tre indici che possono prendere 2 valori ciascuno.

Ora veniamo ai due tensori "misti". Studiamo i due tensori σ^{ijk} ed α^{ijk} che prendiamo, per comodità, simmetrico ed antisimmetrico in $j - k$. Essi hanno, rispettivamente, dimensione

$$d_\sigma = N \frac{1}{2} N(N+1),$$

$$d_\alpha = N \frac{1}{2} N(N-1).$$

Mentre per la decomposizione del prodotto di tre rappresentazioni fondamentali di $SU(3)$ queste dimensioni sono 18 e 9, per l'analogia decomposizione in $SU(2)$ queste dimensioni valgono 6 e 2. Tuttavia, questi due tensori contengono troppi gradi di libertà. Infatti alcune di queste componenti possono essere inglobate nei due tensori, simmetrico ed antisimmetrico, che abbiamo studiato prima.

Definiamo allora

$$\aleph^{ijk} = \sigma^{ijk} - s^{ijk},$$

$$\chi^{ijk} = \alpha^{ijk} - a^{ijk},$$

dove s^{ijk} ed a^{ijk} sono le componenti di un tensore simmetrico ed antisimmetrico.

Allora osserviamo che $\aleph^{ijk} = \aleph^{ikj}$ e che $\chi^{ijk} = -\chi^{ikj}$. Questi ultimi due tensori hanno ancora la proprietà di essere misti proprio come σ^{ijk} ed α^{ijk} ma sono stati "depurati" dai gradi di libertà che già avevamo considerato. Essi hanno dunque dimensione

$$d_\aleph = d_\sigma - d_s,$$

$$d_\chi = d_\alpha - d_a$$

e quindi per quando riguarda la rappresentazione di tre rappresentazioni fondamentali di $SU(3)$ queste dimensioni sono 8 e 8 mentre per le analoghe rappresentazioni di $SU(2)$ valgono 2 e 2.

Questo conclude la dimostrazione che in $SU(3)$ è valida la decomposizione

$$3 \otimes 3 \otimes 3 = 10_S \oplus 8_{MS} \oplus 8_{MA} \oplus 1_A$$

mentre in $SU(2)$ è valida la decomposizione

$$2 \otimes 2 \otimes 2 = 4_S \oplus 2_{MS} \oplus 2_{MA}.$$

Possiamo derivare alcune delle precedenti decomposizioni osservando che in $SU(3)$ la rappresentazione dei tensori covarianti antisimmetrici di rango 2 è equivalente a quella dei vettori contravarianti, mentre in $SU(2)$ quella dei vettori contravarianti è equivalente a quella dei vettori covarianti, come dimostrato nell'appendice 2.

Dunque, cominciando da $SU(3)$, invece di studiare σ^{ijk} , simmetrica in $j-k$, studiamo il tensore $\varphi_{sq}^{kj} = A_{sq} S^{kj}$, antisimmetrico in $s-q$ e simmetrico in $k-j$. Possiamo prenderne le tracce contraendo indici alti e bassi e notare che ovviamente $\varphi_{kk}^{kk} = 0$. Inoltre si riconosce la parte senza traccia di φ_{kq}^{kj} come appartenente a un tensore a due indici, di dimensione $N^2 - 1 = 8$. Dunque in $SU(3)$ si ha la decomposizione

$$3 \otimes 6 = 10 \oplus 8.$$

essendo 3 la dimensione della rappresentazione dei vettori contravarianti e 6 quella dei tensori simmetrici a due indici è.

In $SU(2)$ invece, possiamo studiare, al posto di σ^{ijk} , il tensore ϕ_i^{jk} da cui possiamo estrarre la traccia ϕ_i^{ik} che riconosciamo come la rappresentazione fondamentale 2. Dunque si ha

$$2 \otimes 3 = 4 \oplus 2,$$

essendo 3 la rappresentazione dei tensori simmetrici a due indici.

In questo modo abbiamo ritrovato alcune delle decomposizioni dei tensori misti che abbiamo usato precedentemente e che potevano sembrare un po' accrocchiate.

Appendix 1 La somma

$$S = \sum_{k=1}^N k^2$$

si calcola notando l'identità

$$(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$$

che ci è comoda perchè se ora sommiamo su k da 1 ad N al primo membro abbiamo una somma telescopica e quindi possiamo calcolarne facilmente il risultato. Dunque si ha

$$(N+1)^3 - 1 = 3 \sum_{k=1}^N k^2 + 3 \sum_{k=1}^N k + N,$$

da cui si trova

$$\sum_{k=1}^N k^2 = \frac{1}{3} \{N^3 + 3N^2 + 3N - N\} - \sum_{k=1}^N k$$

ed usando la famosa soluzione di Gauss

$$S = \frac{1}{3} \{N^3 + 3N^2 + 3N - N\} - \frac{N}{2}(N+1).$$

Riorganizzando gli addendi si ha

$$S = N \left\{ \frac{2N^2 + 3N + 1}{6} \right\}.$$

Appendix 2 Le matrici che appartengono ad $SU(3)$ sono unitarie e con determinante uguale ad 1. Dunque:

$$\varepsilon_{ijk} U_1^i U_2^j U_3^k = 1.$$

Se lasciamo liberi gli indici del primo membro, scopriamo che questo è un termine antisimmetrico e quindi

$$\varepsilon_{ijk} U_\alpha^i U_\beta^j U_\gamma^k = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}.$$

Usando l'unitarietà delle matrici U si ottiene

$$\varepsilon_{ijk} U_\alpha^i U_\beta^j = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} (U^\dagger)_k^\gamma$$

ed ora, mandando U in U^\dagger e definendo $\phi_{ij} = \varepsilon_{ijk} \eta^k$ abbiamo

$$(U^\dagger)_\alpha^i (U^\dagger)_\beta^j \phi_{ij} = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} U_k^\gamma \eta^k.$$

Questa scrittura ci dice che la rappresentazione dei tensori antisimmetrici covarianti è equivalente a quella dei vettori. Indicando con $[n]$ la rappresentazione antisimmetrica dei tensori con n indici contravarianti, in $SU(N)$ si ha la più generale proprietà che $[n]$ è equivalente ad $[N-n]^*$, dove l'asterisco indica la rappresentazione coniugata, ovvero quella dei tensori con $N-n$ indici covarianti. In questo caso si ha che $[2]^*$ è equivalente ad $[1]$.

In $SU(2)$ si ha invece la famosa relazione $2 = \bar{2}$, o nella notazione sopra introdotta, $[1] = [1]^*$.