Regole di commutazione del momento angolare

Timoniere

3 Novembre 2007

Prendo un qualsiasi stato normalizzato $|\Psi>$. Ora considero un generico operatore vettoriale, tipo $\hat{r}$, operatore posizione in tre dimensioni. Chiamo questo operatore $\hat{V}$ e misuro $<\Psi_{\delta\omega}|\hat{V}|\Psi_{\delta\omega}>$, dove $|\Psi_{\delta\omega}>= e^{i\hat{j}\cdot\vec{\delta\omega}}|\Psi>$, ovvero lo stato ruotato di un angolo piccolo $\delta\omega$ e $\hat{j} = \frac{\hat{J}}{\hbar}$. Dalla legge di Poisson, sappiamo che:

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{V}$$

quindi si ha che $\delta\vec{V} = \delta\vec{\omega} \times \vec{V}$. Imponiamo che

$$<\Psi_{\delta\omega}|\hat{V}|\Psi_{\delta\omega}>=<\Psi|(\hat{V} - \delta\hat{V})|\Psi>$$

Ovvero che calcolare il valore medio di $\hat{V}$ (che sarà un vettore), sullo stato ruotato, equivale a ruotare all'indietro l'operatore vettore $\hat{V}$ e calcolare il valore medio sullo stato non ruotato. Allora la condizione imposta implica che:

$$<\Psi_{\delta\omega}|\hat{V}|\Psi_{\delta\omega}>=<\Psi|(\hat{V} - \delta\vec{\omega} \times \hat{V})|\Psi>$$

Sviluppando i calcoli si trova che:

$$<\Psi_{\delta\omega}|\hat{V}|\Psi_{\delta\omega}>=<\Psi|e^{-i\hat{j}\cdot\vec{\delta\omega}}\hat{V}e^{i\hat{j}\cdot\vec{\delta\omega}}|\Psi>=<\Psi|(1-i\hat{j}\cdot\vec{\delta\omega})\hat{V}(1+i\hat{j}\cdot\vec{\delta\omega})|\Psi>$$

Trascurando termini di ordine superiore al primo si trova:

$$<\Psi_{\delta\omega}|\hat{V}|\Psi_{\delta\omega}>=<\Psi|\hat{V}|\Psi> -i\sum_{i=1}^{3}\delta\omega_i <\Psi|[\hat{j}_i,\hat{V}]|\Psi>$$

Si trova quindi che

$$<\Psi_{\delta\omega}|\hat{V}_j|\Psi_{\delta\omega}>=<\Psi|\hat{V}_j|\Psi> -i\sum_{i=1}^{3}\delta\omega_i <\Psi|[\hat{l}_i,\hat{V}_j]|\Psi>$$

Nel caso in cui valesse $[\hat{j}_i, \hat{V}_j] = i\epsilon_{ijk}V_k$ [1] otterrei proprio la condizione che ho imposto in alto. Infatti si ha:

$$<\Psi_{\delta\omega}|\hat{V}_j|\Psi_{\delta\omega}>=<\Psi|\hat{V}_j|\Psi> -i\sum_{i=1}^{3}\delta\omega_i <\Psi|i\epsilon_{ijk}V_k|\Psi>=$$

[1]si sottointende la somma su k, ma questa è superflua vista la forma del tensore ϵ_{ijk} che ha componeti nulle quando gli indici soo ripetuti; di fatto solo la componente con k diverso da i e j sarà diverso da 0.

$$=< \Psi|\hat{V}_j|\Psi > + \sum_{i=1}^{3} \delta\omega_i < \Psi|\epsilon_{ijk}V_k|\Psi >$$

Quindi:

$$< \Psi_{\delta\omega}|\hat{V}_j|\Psi_{\delta\omega} >=< \Psi|\hat{V}_j|\Psi > + \sum_{i=1}^{3} \delta\omega_i < \Psi| \sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk}V_k|\Psi > \qquad (1)$$

Ora uso la formula:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$$

$$c_i = \sum_{j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk}a_j b_k$$

e inverto i e j:

$$< \Psi_{\delta\omega}|\hat{V}_i|\Psi_{\delta\omega} >=< \Psi|\hat{V}_i|\Psi > + \sum_{j=1}^{3} \delta\omega_j < \Psi| \sum_{k=1}^{3} \epsilon_{jik}V_k|\Psi >=$$

$$=< \Psi|\hat{V}_i|\Psi > + \sum_{j,k=1}^{3} < \Psi|\epsilon_{jik}\delta\omega_j V_k|\Psi >=< \Psi|\hat{V}_i|\Psi > - \sum_{j,k=1}^{3} < \Psi|\epsilon_{ijk}\delta\omega_j V_k|\Psi >=$$

$$< \Psi|\hat{V}_i|\Psi > - < \Psi|(\vec{\delta\omega} \times \hat{V})_i|\Psi >=< \Psi|(\hat{V} - \delta\vec{\omega} \times \hat{V})_i|\Psi >$$

che è la condizione che avevamo posto all'inizio. Dunque segue che

$$[\hat{j}_i, \hat{V}_j] = i\epsilon_{ijk}V_k$$

Da questo argomento si vede anche che se l'operatore è scalare, quindi secondo la definizione:

$$< \Psi_{\delta\omega}|S|\Psi_{\delta\omega} >=< \Psi|S|\Psi >$$

deve essere che $[\hat{j}_i, S] = 0$ perchè così si annulla il secondo termine del secondo membro della (1).