

Polinomi di Legendre /1

Timoniere

In un pomeriggio piovoso, impaurito dalla consapevolezza di dover ricominciare ad affrontare frontalmente i gruppi di Lie e le loro rappresentazioni teatrali, ho provato a ricavare alcune proprietà dei polinomi di Legendre che potrebbero sempre rivelarsi utili.

Definiamo i polinomi di Legendre tramite una relazione di ricorsione:

$$(2l+1)wP_l(w) - (l+1)P_{l+1}(w) - lP_{l-1}(w) = 0, \quad P_0(w) = w, \quad l \geq 0. \quad (1)$$

A partire da tale scrittura, si vuole trovare una funzione $G(w, s)$, detta funzione generatrice dei polinomi, che ha la proprietà fondamentale di poter essere sviluppata in serie di Taylor intorno ad $s = 0$, in modo da avere, come coefficienti dello sviluppo, proprio i polinomi in questione potendo, quindi, essere scritta come

$$G(s, w) = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(w) s^l.$$

Trovando questa funzione, si avrebbe proprio un'espressione esplicita dei polinomi $P_l(w)$, se solo sapessimo sviluppare in serie $G(w, s)$.

Trovare un'espressione esplicita dei $P_l(w)$ a partire dalla $G(s, w)$ è, tuttavia, abbastanza difficile. Per dare un minimo di consistenza allo scritto, ho allora pensato di far vedere che, partendo dall'espressione esplicita di questi polinomi,

$$P_l(w) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dw^l} (w^2 - 1)^l,$$

si ritrova la stessa funzione generatrice $G(s, w)$. Il motivo per cui è importante ricavare la funzione generatrice è che, a partire da essa, si possono semplificare i calcoli nell'atomo a due elettroni.

Si dimostra infine che questi polinomi soddisfano un'equazione differenziale notevole,

$$\left[(w^2 - 1) \frac{d^2}{dw^2} + 2w \frac{d}{dw} \right] P_l(w) = l(l+1)P_l(w),$$

che permette di farsi un'idea sul motivo per cui una funzione "abbastanza regolare" possa essere decomposta usando i $P_l(w)$.

Funzione Generatrice

Moltiplichiamo l'espressione (1) per s^l e sommiamo su l ; in questo modo abbiamo:

$$\sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)wP_l(w)s^l - \sum_{l=0}^{\infty} (l+1)P_{l+1}(w)s^l - \sum_{l=0}^{\infty} lP_{l-1}(w)s^l = 0.$$

Riscriviamo questa espressione come

$$2w \sum_{l=0}^{\infty} l P_l(w) s^l + w \sum_{l=0}^{\infty} P_l(w) s^l - \sum_{l=0}^{\infty} l P_{l+1}(w) s^l - \sum_{l=0}^{\infty} P_{l+1}(w) s^l - \sum_{l=0}^{\infty} l P_{l-1}(w) s^l = 0, \quad (2)$$

ed osserviamo che

$$\sum_{l=0}^{\infty} l P_l(w) s^l = P_1 s + 2P_2 s^2 + 3P_3 s^3 \dots = s \frac{dG(s, w)}{ds};$$

$$\sum_{l=0}^{\infty} l P_{l+1}(w) s^l = P_2 s + 2P_3 s^2 + 3P_4 s^3 \dots = s \frac{d}{ds} \left(\frac{G(s, w) - P_0(w)}{s} \right) = s \frac{d}{ds} \left(\frac{G(s, w) - w}{s} \right);$$

$$\sum_{l=0}^{\infty} P_{l+1}(w) s^l = P_1 + P_2 s + P_3 s^2 + \dots = \frac{G(s, w) - w}{s};$$

$$\sum_{l=0}^{\infty} l P_{l-1}(w) s^l = P_0 s + 2P_1 s^2 + 3P_2 s^3 + \dots = s \frac{d}{ds} (sG(w, s)).$$

L'espressione (2) si può quindi riscrivere come

$$2ws \frac{dG}{ds} + wG - s \frac{d}{ds} \left(\frac{G-w}{s} \right) - \frac{G-w}{s} - s \frac{d}{ds} (sG) = 0,$$

da cui otteniamo, riarrangiando i termini, l'equazione differenziale

$$\frac{dG}{ds} (2ws - 1 - s^2) + G(w - s) = 0.$$

Integriamo questa equazione, riscrivendola come

$$\frac{dG}{G} = \frac{w-s}{s^2 - 2ws + 1} ds,$$

da cui si trova

$$G(s, w) = \exp \left(\int \frac{w-s}{s^2 - 2ws + 1} ds \right) = \exp \left(-\frac{1}{2} \ln(s^2 - 2ws + 1) \right) = \frac{1}{\sqrt{s^2 - 2ws + 1}}.$$

Per inciso, notiamo che possiamo scrivere

$$\frac{1}{r_{12}} \equiv \frac{1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} = \frac{1}{(r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos \theta)^{1/2}} = \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r_{<}}{r_{>}} \right)^l P_l(\cos \theta),$$

dove θ è l'angolo tra i vettori \mathbf{r}_1 ed \mathbf{r}_2 ed $r_{<}$ indica il modulo più piccolo. Questa è l'espressione per cui è valsa la pena perdere il pomeriggio.

Avendo trovato la funzione generatrice dei polinomi di Legendre, se ne cerca una sua espansione in serie di Taylor intorno al punto $s = 0$.

Laddove serve usare i polinomi di Legendre in fisica, o meglio, laddove ho visto che serviva usarli e non ero capace di farlo, $-1 < w < 1$. E' bello vedere che in questo intervallo la $G(s, w)$ è una funzione abbastanza regolare, sviluppabile in serie intorno ad $s = 0$.

Ora si deve dimostrare che

$$G(s, w) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} \frac{d^l}{ds^l} G(0, w) s^l = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dw^l} (w^2 - 1)^l s^l,$$

cioè far vedere che

$$\frac{d^l}{dw^l} (w^2 - 1)^l = 2^l \frac{d^l}{ds^l} \frac{1}{\sqrt{s^2 - 2ws + 1}} \Big|_{s=0}. \quad (3)$$

In tal modo, si otterrebbe un'espressione esplicita per i polinomi di Legendre di questo tipo:

$$P_l(w) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dw^l} (w^2 - 1)^l. \quad (4)$$

Questo è il momento buono per dire che "lasciamo al lettore l'esercizio di dimostrare che questa uguaglianza sussiste per qualsiasi l ". La realtà è che invece avevo scritto una dimostrazione per induzione che il Marinaio Semplice ha poi prontamente riconosciuto come scorretta. Visto che ho trascorso un'altra giornata nell'intento di provare la (3), ho deciso che per il momento ci si può accontentare di verificare la correttezza di questa equazione molto comodamente a mano. Qualunque marinaio voglia cimentarsi con la (3) sarebbe ben accolto!

Adesso si farà vedere che a partire dall'espressione esplicita, si ritrova la stessa funzione generatrice.

Espressione esplicita¹

Scriviamo allora

$$P_l(w) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dw^l} (w^2 - 1)^l.$$

Ricordando che funzioni $f(z)$ analitiche in un insieme D si possono scrivere come

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi,$$

con γ totalmente interna a D , z punto interno a γ e $\xi \in \gamma$, si trova che

$$\frac{d^n}{dz^n} f(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi.$$

Pensando l'argomento di P_l come una variabile complessa, scrivendo $f(z) = (z^2 - 1)^n$, si ottiene

$$2^n n! P_n(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{(\xi^2 - 1)^n}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi,$$

¹Gli argomenti usati in questa sezione, si possono vedere, svolti meglio in Mathews Walker - Mathematical methods of Physics. E' qui che li ho studiati.

da cui

$$P_n(z) = \frac{1}{2^n} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{(\xi^2 - 1)^n}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi. \quad (5)$$

Per integrare sul cerchio centrato in z e di raggio $|\sqrt{z^2 - 1}|$, poniamo $\xi = z + |\sqrt{z^2 - 1}|e^{i\varphi}$. Per evitare di dover scrivere i moduli, possiamo prendere z reale. Si ha

$$\xi^2 - 1 = z^2 + 2z\sqrt{z^2 - 1}e^{i\varphi} + (z^2 - 1)e^{2i\varphi} - 1.$$

Si vede facilmente che

$$z^2 + (z^2 - 1)e^{2i\varphi} - 1 = 2(z^2 - 1) \cos e^{i\varphi},$$

usando l'espressione

$$\cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}.$$

Dunque

$$\xi^2 - 1 = 2(z^2 - 1) \cos e^{i\varphi} + 2z\sqrt{z^2 - 1}e^{i\varphi} = 2\sqrt{z^2 - 1}e^{i\varphi}(z + \sqrt{z^2 - 1} \cos \varphi)$$

e quindi

$$\xi^2 - 1 = 2(\xi - z)(z + \sqrt{z^2 - 1} \cos \varphi).$$

Inoltre vale

$$d\xi = i\sqrt{z^2 - 1}e^{i\varphi}d\varphi = i(\xi - z)d\varphi.$$

Riprendiamo l'integrale (5), e lo riscriviamo come

$$P_n(z) = \frac{1}{2^n} \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{2^n(\xi - z)^n(z + \sqrt{z^2 - 1} \cos \varphi)^n}{(\xi - z)^{n+1}} i(\xi - z)d\varphi,$$

e quindi

$$P_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (z + \sqrt{z^2 - 1} \cos \varphi)^n d\varphi.$$

Questa si chiama rappresentazione integrale di Laplace dei polinomi di Legendre. Ora poniamo, come prima,

$$G(s, z) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(z)s^n.$$

ed otteniamo

$$G(s, z) = \sum_{n=0}^{\infty} s^n \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (z + \sqrt{z^2 - 1} \cos \varphi)^n d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{1 - sz - s\sqrt{z^2 - 1} \cos \varphi}.$$

L'espressione della funzione generatrice si trova risolvendo quest'integrale che per fortuna abbiamo già visto risolvere al corso di Metodi Matematici:

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{1 - a \cos \varphi} = \frac{2\pi}{\sqrt{1 - a^2}}, \quad 0 < a < 1.$$

Possiamo scrivere

$$G(s, z) = \frac{1}{2\pi(1-sz)} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\left(1 - \frac{s\sqrt{z^2-1}}{1-sz} \cos \varphi\right)}$$

e quindi il risultato che troviamo è valido per

$$0 < \frac{s\sqrt{z^2-1}}{1-sz} < 1.$$

Per la funzione generatrice si ha:

$$G(s, z) = \frac{1}{2\pi(1-sz)} \frac{2\pi}{\sqrt{1 - \frac{s^2(z^2-1)}{(1-sz)^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-2sz+s^2}}. \quad (6)$$

Abbiamo ritrovato la stessa funzione generatrice che prima era stata dedotta a partire dalla formula di ricorrenza (1). I polinomi definiti dalla (1) e dalla (4) ammettono la stessa funzione generatrice. Le due definizioni, quindi, coincidono.

Problema differenziale

A partire dall'espressione esplicita dei polinomi $P_l(w)$, si può dimostrare che essi verificano una importante equazione differenziale. Ci serviamo di due formule che ricaviamo nell'Appendice. La prima di esse è

$$\left[w \frac{d}{dw} + (l+1) \right] P_l(w) = \frac{d}{dw} P_{l+1}(w), \quad (7)$$

mentre la seconda è

$$(l+1) \frac{d}{dw} P_{l+1}(w) = w \frac{d}{dw} P_l(w) + \frac{1}{2}(w^2-1) \frac{d^2}{dw^2} P_l(w) + (l+1)P_l(w) + w(l+1) \frac{d}{dw} P_l(w) + \frac{l(l+1)}{2} P_l(w). \quad (8)$$

Tramite la (7) e la (8), otteniamo

$$(l+1) \left[w \frac{d}{dw} + (l+1) \right] P_l(w) = w \frac{d}{dw} P_l(w) + \frac{1}{2}(w^2-1) \frac{d^2}{dw^2} P_l(w) + (l+1)P_l(w) + w(l+1) \frac{d}{dw} P_l(w) + \frac{l(l+1)}{2} P_l(w)$$

da cui si trova l'equazione differenziale

$$\left[(1-w^2) \frac{d^2}{dw^2} - 2w \frac{d}{dw} + l(l+1) \right] P_l(w) = 0.$$

Questa relazione è molto importante e può essere riscritta come

$$\left[(w^2-1) \frac{d^2}{dw^2} + 2w \frac{d}{dw} \right] P_l(w) = l(l+1)P_l(w),$$

da cui cominciamo ad intuire che questi polinomi di Legendre sono polinomi importanti. Abbiamo trovato, infatti, che i $P_l(w)$ sono autofunzioni di un operatore differenziale:

$$\mathbf{L} = (w^2-1) \frac{d^2}{dw^2} + 2w \frac{d}{dw},$$

i cui autovalori sono $l(l+1)$. \mathbf{L} è un particolare tipo di operatore di Sturm-Liouville. Questi operatori possono essere scritti nella forma

$$\mathbf{S} = \mathbf{D}p(w)\mathbf{D} + q(w),$$

dove

$$\mathbf{D} \equiv -i \frac{d}{dw}$$

e dove $p(w)$ e $q(w)$ sono operatori di moltiplicazione. Nel problema che stiamo considerando $p(w) = (1-w^2)$ e $q(w) = 0$.

Infatti in questo caso si ha

$$\mathbf{S}f(w) = -\frac{d}{dw}(1-w^2)\frac{d}{dw}f(w) = \frac{d}{dw}(w^2-1)\frac{d}{dw}f(w)$$

e, visto che

$$\frac{d}{dw}(w^2-1) = \left[\frac{d}{dw}, (w^2-1) \right] + (w^2-1)\frac{d}{dw} = 2w + (w^2-1)\frac{d}{dw},$$

otteniamo

$$\mathbf{S}f(w) = 2w\frac{d}{dw}f(w) + (w^2-1)\frac{d^2}{dw^2}f(x)$$

come si era detto. Tuttavia la forma che assume \mathbf{S} in questo problema è particolarmente comoda,

$$\mathbf{S} = \mathbf{L} = \mathbf{D}(1-w^2)\mathbf{D} \tag{9}$$

ed è quella che useremo per mostrare che esso è un operatore hermitiano. Consideriamo come dominio di \mathbf{L} lo spazio di funzioni $f(w)$ a quadrato sommabile $L^2[-1, 1]$ con le condizioni di Dirichlet $f(1) = f(-1) = 0$ ai bordi. In questo dominio si vede facilmente che l'operatore \mathbf{D} è hermitiano. Basta prendere due funzioni $f(w)$ e $g(w)$ e verificare l'uguaglianza

$$(f(w), \mathbf{D}g(w)) - (\mathbf{D}f(w), g(w)) = 0.$$

Tacitamente ma non troppo, per fare il calcolo precedente prendiamo solo funzioni che, sotto l'applicazione di \mathbf{D} , fanno ancora parte del dominio definito prima.

Se \mathbf{D} è hermitiano, lo è ovviamente anche \mathbf{L} per la (9). Questo implica che i polinomi di Legendre $P_l(w)$ sono autofunzioni dell'operatore hermitiano \mathbf{L} e che, quindi, costituiranno una base ortonogonale rispetto a cui è possibile decomporre le funzioni dello spazio che stiamo considerando. Il "quindi" non è niente affatto ovvio. Infatti $L^2[-1, 1]$ non è uno spazio finito dimensionale e non è detto che valga il teorema spettrale degli operatori hermitiani come studiato a Geometria I.

Tuttavia questa è la giustificazione meno irrazionale che mi sia mai stata accennata per una scrittura del tipo

$$f(w) = \sum_{l=0}^{\infty} \alpha_l P_l(w).$$

Secondo quanto detto, si potrebbe pensare di poter sviluppare nella base dei polinomi di Legendre solo le funzioni $f(w) \in L^2[-1, 1]$ per cui valgono le condizioni di Dirichlet agli estremi. Tuttavia $f(w)$ può anche non esser nulla agli estremi dell'intervallo $[-1, 1]$, perchè di sicuro esiste una funzione nulla agli estremi che si approssima bene quanto si vuole ad una funzione $f(w) \in L^2[-1, 1]$ senza le condizioni di Dirichlet.

Appendice

In questa sezione dimostriamo la (7) e la (8).

Ricordiamo la formula di Liebnitz della derivata n -esima del prodotto di due funzioni ², che si scrive così:

$$\frac{d^n}{dw^n}(f(w)g(w)) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \frac{d^i}{dw^i} f(w) \frac{d^{n-i}}{dw^{n-i}} g(w).$$

Dalla scrittura

$$\int \frac{d}{dw} P_l(w) dw = P_l(w),$$

usando la (4), si può scrivere

$$\int dw \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dw^l} l(w^2 - 1)^{l-1} 2w = P_l(w)$$

e si trova l'equazione

$$\int dw \frac{1}{2^l l!} 2l \sum_{k=0}^l \binom{l}{k} \frac{d^k}{dw^k} w \frac{d^{l-k}}{dw^{l-k}} (w^2 - 1)^{l-1} = P_l(w).$$

Nella sommatoria restano soltanto i primi due termini; tutti gli altri si annullano:

$$\int dw \frac{1}{2^l l!} 2l \left\{ w \frac{d^l}{dw^l} (w^2 - 1)^{l-1} + l \frac{d^{l-1}}{dw^{l-1}} (w^2 - 1)^{l-1} \right\} = P_l(w).$$

Scrivendo in modo più evidente i due integrali, possiamo riconoscere la prima delle due relazioni che cerchiamo:

$$\int dw \frac{1}{2^{l-1} (l-1)!} w \frac{d}{dw} \frac{d^{l-1}}{dw^{l-1}} (w^2 - 1)^{l-1} + \int \frac{l}{2^{l-1} (l-1)!} dw \frac{d^{l-1}}{dw^{l-1}} (w^2 - 1)^{l-1} = P_l(w)$$

e quindi

$$\int dw w \frac{d}{dw} P_{l-1}(w) + \int dw l P_{l-1}(w) = P_l(w).$$

Derivando quest'ultima relazione otteniamo

$$\left[w \frac{d}{dw} + l \right] P_{l-1}(w) = \frac{d}{dw} P_l(w)$$

e mandando l in $l+1$ troviamo la (7).

Cerchiamo adesso la seconda relazione usando ancora la (4):

$$(l+1)P_{l+1}(w) = \frac{(l+1)}{2(l+1)} \frac{1}{2^l l!} \frac{d^{l+1}}{dw^{l+1}} ((w^2 - 1)(w^2 - 1)^l).$$

Possiamo riscrivere questa relazione servendoci della formula di Liebnitz:

$$(l+1)P_{l+1}(w) = \frac{1}{2} \frac{1}{2^l l!} \sum_{k=0}^{l+1} \binom{l+1}{k} \frac{d^k}{dw^k} (w^2 - 1) \frac{d^{l+1-k}}{dw^{l+1-k}} (w^2 - 1)^l.$$

²Questa formula è già stata dimostrata dal Marinaio Semplice nello scritto "Formule di Rodriguez".

In questa sommatoria sono diversi da zero solo i primi tre termini, quindi si trova

$$(l+1)P_{l+1}(w) = \frac{1}{2} \frac{1}{2^l l!} \left\{ (w^2-1) \frac{d^{l+1}}{dw^{l+1}} (w^2-1)^l + (l+1)2w \frac{d^l}{dw^l} (w^2-1)^l + \binom{l+1}{2} 2 \frac{d^{l-1}}{dw^{l-1}} (w^2-1)^l \right\}$$

ed usando $\binom{l+1}{2} = \frac{l(l+1)}{2}$, il secondo membro dell'ultima equazione diventa:

$$\frac{1}{2}(w^2-1) \frac{d}{dw} \left[\frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dw^l} (w^2-1)^l \right] + \frac{1}{2}(l+1)2w \left[\frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dw^l} (w^2-1)^l \right] + \frac{1}{2}l(l+1) \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dw^l} \int dw (w^2-1)^l .$$

Si ottiene allora

$$(l+1)P_{l+1}(w) = \frac{1}{2}(w^2-1) \frac{d}{dw} P_l(w) + w(l+1)P_l(w) + \frac{l(l+1)}{2} \int dw P_l(w) ,$$

che, derivata, diventa:

$$(l+1) \frac{d}{dw} P_{l+1}(w) = w \frac{d}{dw} P_l(w) + \frac{1}{2}(w^2-1) \frac{d^2}{dw^2} P_l(w) + (l+1)P_l(w) + w(l+1) \frac{d}{dw} P_l(w) + \frac{l(l+1)}{2} P_l(w) ,$$

ed abbiamo così dimostrato anche la (8).